Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6,26, A4.18

13. Januar 2020

Modulklausur Algebra

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Aufgabe 1: (*7 Punkte*)

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen (einschließlich Vielfachheiten) der folgenden Gleichungen:

a) $x^2 - 4x - 1 = 4i(x-2)$

b) $x^6 + 10x^4 + 29x^2 + 20 = 0$ (*Hinweis:* Beachten Sie, daß alle Exponenten gerade sind!)

c) Bestimmen Sie zunächst alle Nullstellen des größten gemeinsamen Teilers der beiden Polynome

$$f = X^6 + 3X^5 + 4X^4 + 6X^3 + 5X^2 + 3X + 2 \quad \text{und} \quad g = X^6 - 3X^5 + 4X^4 - 6X^3 + 5X^2 - 3X + 2\,,$$

und dann die von f und g jeweils mit Vielfachheiten! Beachten Sie dabei, daß es für den ggT nicht auf konstante Faktoren ankommt.

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)

G sei eine Gruppe und $\psi\colon G \to G$ sei die Abbildung, die jedes Element $g \in G$ auf $g^2 = g \cdot g$ abbildet. Zeigen Sie:

a) ψ ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn G abelsch ist.

b) Ist G eine endliche Gruppe ungerader Ordnung, so gibt es ein natürliche Zahl k mit der Eigenschaft, daß $\psi(g^k) = \psi(g)^k = g$ ist für alle $g \in G$.

c) Ist G eine endliche Gruppe gerader Ordnung, so ist ψ nie injektiv. (*Hinweis:* Zeigen Sie, daß $\operatorname{Kern}\psi$ genau aus den Elementen x besteht, die zu sich selbst invers sind, und daß deren Anzahl gerade ist.)

d) Nun sei speziell G die prime Restklassengruppe $(\mathbb{Z}/N)^\times$. Für welche $N \geq 2$ ist ψ ein Automorphismus?

Aufgabe 3: (*7 Punkte*)

a) G sei eine endliche Gruppe, und die Ordnung $|G|$ von G sei eine Primzahl. Zeigen Sie, daß G zyklisch ist!

b) Für welche natürlichen Zahlen N mit $9 \leq N \leq 14$ ist die prime Restklassengruppe $(\mathbb{Z}/N)^\times$ zyklisch?

c) Bestimmen Sie in $(\mathbb{Z}/100)^\times$ das Inverse von drei!

• • • Bitte wenden! • • •

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

Wegen der Einhaltung notwendiger Abstandsregeln dürfen maximal zweihundert Delegierte zum Parteitag der Partei für Gesundheit und Wohlstand in die Mehrzweckhalle der Stadt Großwortbach kommen; um ganz sicher zu gehen, begrenzt der Parteivorstand diese Zahl jedoch noch weiter. Bei der Begrüßung sitzen der Vorsitzende und seine drei Stellvertreter (mit gebührendem Abstand) auf dem Podium; die restlichen Delegierten sitzen in mehreren Siebenerreihen im Saal verteilt. Da sich herausstellt, daß dabei die horizontalen Abstände deutlich größer sind als die vertikalen, wird die Bestuhlung für den nächsten Tag verändert: Nun sitzen die Delegierten in Elferreihen; nur in der letzten Reihe sitzen nur acht. Auf dem Podium ändert sich nichts. Beim Abschlußbankett sitzen die Delegierten an großen runden Tische, an jedem Tisch vier. Wie viele Delegierte waren beim Parteitag?

Aufgabe 5: *(7 Punkte)*

a) Wann heißt ein Element x eines (kommutativen) Rings R eine Einheit?

b) Zeigen Sie: Wenn $x \in R$ eine Einheit ist, so auch jede Potenz x^n. Nun sei $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{2}$. Zeigen Sie:

c) Ist $a + b\sqrt{2}$ eine Einheit in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{2}$, so ist auch $a - b\sqrt{2}$ eine.

d) $a + b\sqrt{2}$ ist genau dann eine Einheit in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{2}$, wenn $a^2 - 2b^2 = \pm 1$ ist.

e) Finden Sie eine Lösung der Gleichung $a^2 - 2b^2 = 1$ mit einstelligen positiven ganzen Zahlen a und b!

f) Zeigen Sie, daß es unendlich viele Einheiten in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{2}$ gibt!

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Zerlegen Sie das Polynom $f = 6X^4 - 12X^2$ sowohl in $\mathbb{Q}[X]$ als auch in $\mathbb{Z}[X]$ in seine irreduziblen Faktoren! Wie viele irreduzible Faktoren gibt es jeweils?

b) Finden Sie einen endlichen Erweiterungskörper $K/\mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft, daß f über K in Linearfaktoren zerfällt!

c) Welchen Grad hat der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 7: *(15 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Zerfällungskörper K_1 von $f_1 = X^4 - 2$ und K_2 von $f_2 = X^4 - 4$ sowie K_3 von $f_3 = X^4 - 16$ über $\mathbb{Q}$!

b) Finden Sie möglichst einfache $\mathbb{Q}$-Vektorraumbasen der Körper K_ν!

c) Für welche ν ist $K_\nu \cong \mathbb{Q}[X]/(f_\nu)$?

d) Für welche ν ist die Körpererweiterungen $K_\nu/\mathbb{Q}$ GALOISsch?

e) Finden Sie alle Monomorphismen $K_2 \to \mathbb{C}$!

f) Bestimmen Sie die Gruppe $G = \mathrm{Aut}(K_2/\mathbb{Q})$ und entscheiden Sie, ob diese auflösbar ist!

g) Geben Sie alle Zwischenkörper L mit $\mathbb{Q} \subset L \subset K_2$ explizit an, und finden Sie, sofern möglich, jeweils eine Gruppe U von Automorphismen von K_2 derart, daß $K_2^U = L$ ist sowie eine Gruppe H von Automorphismen von L mit $L^H = \mathbb{Q}$!

h) Zeigen Sie, daß $K_2 = \mathbb{Q}\big(\sqrt{2} + i\big)$ ist!