WOLFGANG K. SEILER B6,26, A4.18
Tel. 2515

1. Februar 2020

Modulklausur Algebra

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)
Bestimmen Sie alle Lösungen (einschließlich Vielfachheiten) der folgenden Gleichungen:

a) $x^2 - 2x + 9 = 2i(x-1)$

Lösung: Bringt man alle mit x behafteten Terme auf die linke Seite und den Rest auf die rechte, wir die Gleichung zu $x^2 - (2+2i)x = -9-2i$ (d.h. $p = -2-2i$ und $q = -9-2i$) oder $\bigl(x-(1+i)\bigr)^2 - 2i = -9-2i$. Addition von $2i$ auf beiden Seiten macht daraus $\bigl(x+(1+i)\bigr)^2 = -9$, d.h. $x-(1+i) = \pm 3i$. Die Lösungen sind somit $1+4i$ und $1-2i$. Da eine quadratische Gleichung mit Vielfachheiten gezählt zwei Lösungen hat, sind beides einfache Nullstellen.

b) $x^8 - x^7 + x^6 - x^5 - 2x^4 + 2x^3 = 0$

Lösung: Da man x^3 ausklammern kann, ist $x = 0$ eine dreifache Nullstelle; die restlichen fünf Nullstellen sind die des Polynoms $f = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2$. Das Produkt dieser Nullstellen ist nach VIÈTE gleich -2, und ihre Summe ist eins. Durchprobieren der Teiler von zwei ergibt

$$\begin{aligned} f(1) &= 1-1+1-1-2+2 = 0 \\ f(-1) &= -1-1-1-1+2+2 = 0 \\ f(2) &= 32-16+8-4-4+2 = 18 \\ f(-2) &= -32-16-8-4+4+2 < 0 \end{aligned}$$

Eins und minus eins sind somit Nullstellen, ± 2 aber nicht.
$f' = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$ verschwindet für $x = 1$, also ist eins eine doppelte Nullstelle, und die fehlenden zwei haben Produkt zwei und Summe Null, sind also $\pm\sqrt{-2} = \pm i\sqrt{2}$. Die Ausgangsgleichung hat also die Lösungen $x = 0$ mit Vielfachheit drei und $x = 1$ mit Vielfachheit zwei, sowie die einfachen Lösungen $x = -1$, $x = i\sqrt{2}$ und $x = -i\sqrt{2}$.

Aufgabe 2: (*14 Punkte*)

a) Zeigen Sie auf zwei verschiedene Arten, daß die Menge $\mathfrak{A}_n$ aller gerader Permutationen ein Normalteiler der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ aller Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist!

Lösung: Da $\mathfrak{A}_n$ halb so viele Elemente wie $\mathfrak{S}_n$ hat, handelt es sich um eine Untergruppe vom Index zwei, und solche Untergruppen sind stets Normalteiler.
Außerdem ist $\mathfrak{A}_n$ der Kern der Signatur $\sigma\colon \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$, und Kerne von Gruppenhomomorphismen sind stets Normalteiler.

b) Zeigen Sie, daß die von der Transposition $(1\ 2)$ erzeugte Untergruppe für $n > 2$ kein Normalteiler ist!

Lösung: Die Konjugation von $(1\ 2)$ mit $(1\ 3)$ führt auf $(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3) = (2\ 3)$, was nicht in der von $(1\ 2)$ erzeugten Untergruppe liegt, denn diese enthält außer dieser Transposition nur noch die Identität.

c) Zeigen Sie, daß der Durchschnitt zweier Normalteiler einer Gruppe G wieder ein Normalteiler von G ist!

Lösung: N, M seien Normalteiler von G. Dann ist $N \cap M$ zunächst eine Untergruppe von G, denn sowohl N als auch M enthalten das Neutralelement, und für $g, h \in N \cap M$ liegen gh und g^{-1} sowohl in N als auch in M, also im Durchschnitt. Für $g \in N \cap M$ und $h \in G$ schließlich liegt g^h sowohl in N als auch in M, da beides Normalteiler sind, und damit ist $g^h \in N \cap M$, d.h. auch $N \cap M$ ist ein Normalteiler.

d) Zeigen Sie, daß $\mathfrak{S}_n$ für $n \geq 5$ keinen zyklischen Normalteiler (außer $\{\mathrm{id}\}$) hat!

Lösung: Ist N ein zyklischer Normalteiler von $\mathfrak{S}_n$, so ist $N \cap \mathfrak{A}_n$ nach *c)* ein Normalteiler von $\mathfrak{A}_n$. Da $\mathfrak{A}_n$ für $n \geq 5$ eine einfache Gruppe und nicht zyklisch ist, kann $N \cap \mathfrak{A}_n$ daher nur aus der Identität bestehen. Somit enthält N abgesehen von der Identität nur ungerade Permutationen; da das Produkt zweier ungerader Permutationen gerade ist, kann N höchstens eine ungerade Permutation enthalten. Deren Quadrat muß daher die Identität sein; in der Darstellung als Produkt elementfremder Zykeln ist sie also ein Produkt von Transpositionen. Falls sie gleich einer Transposition $(a\ b)$ ist, zeigt das gleiche Argument wie in *b)*, daß N kein Normalteiler sein kann, denn für $c \notin \{a, b\}$ ist $(a\ c)(a\ b)(a\ c) = (b\ c)$. Falls sie ein Produkt mehrerer Transpositionen ist, läßt sie sich schreiben als $(a\ b)(c\ d)\pi$, wobei a, b, c, d vier verschiedene Zahlen sind und π Produkt von Transpositionen, in denen keine dieser vier Zahlen vorkommt. Da elementfremde Transpositionen miteinander kommutieren, ist

$$(a\ c)\big((a\ b)(c\ d)\pi\big)(a\ c) = (a\ d)(b\ c)\pi\,,$$

was nicht in N liegt. Somit ist auch dieser Fall ausgeschlossen, d.h. N besteht nur aus der Identität.

e) Für welche $m < n$ ist $\mathfrak{S}_m$ ein Normalteiler von $\mathfrak{S}_n$?

Lösung: Für $m = 1$ enthält $\mathfrak{S}_m$ nur die Identität, ist also Normalteiler in jeder $\mathfrak{S}_n$. Für $m > 1$ ist $\mathfrak{S}_m$ nie Normalteiler einer $\mathfrak{S}_n$ mit $n > m$, denn $(1\ 2)^{(1\ n)} = (1\ n)(1\ 2)(1\ n) = (2\ n)$ liegt nicht in $\mathfrak{S}_m$.

f) Zeigen Sie, daß $\mathfrak{S}_3$ isomorph zur Diedergruppe D_3 ist und daß diese Gruppe einen zyklischen Normalteiler hat!

Lösung: Die Diedergruppe ist die Gruppe aller Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks. Eine solche Symmetrieoperation ist eindeutig bestimmt durch ihren Effekt auf die Ecken; dies ergibt einen Homomorphismus $D_3 \to \mathfrak{S}_3$, der jeder Symmetrieoperation die von ihr verursachte Permutation der drei Ecken zuordnet. Umgekehrt läßt sich zu jeder Permutation der drei Ecken eine Symmetrieoperation finden: Bei der Identität ist das klar, für Transpositionen ist es die Spiegelung an der Mittelsenkrechten der beiden vertauschten Ecken, und die beiden Dreierzykeln aus $\mathfrak{S}_3$ lassen sich durch die Drehungen um $120°$ und $240°$ realisieren. Somit ist der Homomorphismus ein Isomorphismus.

Aufgabe 3: (*7 Punkte*)

Zeigen Sie:

a) Der Ring der ganzen Zahlen modulo einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.

Lösung: Ist n keine Primzahl, so gibt es Zahlen $1 < a, b < n$ mit $n = ab$. In $\mathbb{Z}/n$ ist dann das Produkt der Restklassen von a und b gleich Null, obwohl beide von der Nullklasse verschieden sind. Somit kann $\mathbb{Z}/n$ kein Körper sein.

Ist dagegen n eine Primzahl und a Repräsentant einer Restklasse ungleich der Nullklasse, so ist a kein Vielfaches von n, also teilerfremd zu n. Mit dem erweiterten EUKLIDischen Algorithmus lassen sich daher $b, c \in \mathbb{Z}$ finden mit $1 = \mathrm{ggT}(a, n) = ab + cn$, und in $\mathbb{Z}/n$ ist das Produkt der Restklassen von a und b die Klasse der Eins. Somit hat jedes Element ungleich Null ein multiplikatives Inverses, der Ring $\mathbb{Z}/n$ ist also ein Körper.

b) Geben Sie die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/12)^\times$ explizit an! Ist diese Gruppe zyklisch?

Lösung: Die Einheitengruppe besteht aus allen Klassen, deren Elemente teilerfremd zu zwölf sind, die also weder durch zwei noch durch drei teilbar sind. Das sind die Klassen zu 1, 5, 7 und 11. Wegen $5^2 \equiv 7^2 \equiv 11^2 \equiv 1 \bmod 12$ ist $(\mathbb{Z}/12)^\times$ nicht zyklisch, sondern isomorph zur KLEINschen Vierergruppe.

c) Ist die Gruppe $(\mathbb{Z}/31)^\times$ zyklisch?

Lösung: 31 ist eine Primzahl, d.h. $\mathbb{Z}/31$ ist ein Körper. Da die multiplikative Gruppe eines jeden endlichen Körpers zyklisch ist, ist auch $(\mathbb{Z}/31)^\times$ zyklisch, also isomorph zu $\mathbb{Z}/30$.

d) Bestimmen Sie in $(\mathbb{Z}/31)^\times$ das Inverse von drei!

Lösung: $31 : 3 = 1$ Rest 10; daher ist $1 = 31 - 3 \cdot 10$, d.h. $-10 \equiv 21 \bmod 31$ ist ein multiplikatives Inverses von drei.

Aufgabe 4: *(8 Punkte)*

Zur Vorbereitung des Fastnachtsumzugs treffen sich insgesamt achtundvierzig Vertreter der lokalen Vereine Carnevalia und VAF (Verein antialkoholischer Fastnachter) in einem Restaurant. Die Mitglieder aus dem Vorstand von Carnevalia trinken je ein Glas Sekt für dreizehn Euro, die (etwas zahlreicher erschienenen) sonstigen Mitglieder trinken je ein Glas Weinschorle für fünf Euro, und die VAF-Vertreter je ein Mineralwasser für zwei Euro. Insgesamt kassiert der Wirt 333 Euro, von denen allerdings 33 auf Trinkgelder entfallen.

a) Was können Sie über die mögliche (Gesamt-)Anzahl n von anwesenden Carnevalia-Mitgliedern sagen?

Lösung: Bezeichnet r die Anzahl der anwesenden Carnevalia-Vorstände, s die der sonstigen Mitglieder und t die der VAF-Vertreter, so gelten die beiden Gleichungen

$$r + s + t = 48 \quad \text{und} \quad 13r + 5s + 2t = 333 - 33 = 300\,.$$

Auflösen der ersten Gleichung ergibt $t = 48 - r - s$, also ist

$$13r + 5s + 2(48 - r - s) = 11r + 3s + 96 = 300 \quad \text{oder} \quad 11r + 3s = 204\,.$$

Außerdem gelten die Ungleichungen $r \geq 1$, $s > r$ und $t \geq 1$.
Da drei ein Teiler von 204 ist, hat die diophantische Gleichung $11r + 3s = 204$ in $\mathbb{Z}$ die Lösung $r = 0$ und $s = 68$; da drei und elf teilerfremd sind und $11 \cdot 3 - 3 \cdot 11$ verschwindet, ist die allgemeine Lösung daher $r = 3k$ und $s = 68 - 11k$ mit einer beliebigen ganzen Zahl k. Für $k > 6$ wird s negativ, also muß $k \leq 6$ sein.
Die Anzahl $t = 48 - r - s = 48 - 3k - 68 + 11k = 8k - 20$ der VAF-Vertreter kann auch nicht negativ sein, also muß $k \geq 3$ sein. Schließlich ist noch

$$s = 68 - 11k > r = 3k \Longrightarrow 68 \leq 14k \Longrightarrow k < 5\,.$$

Also kommen nur $k = 3$ und $k = 4$ in Frage. Die zugehörigen Werte für r, s, t und $n = r+s$ sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

k	r	s	t	n
3	9	35	4	44
4	12	24	12	36

Somit sind entweder 36 oder 44 Carnevalia-Mitglieder anwesend.

b) Einer der Vorstände von Carnevalia erwähnt, daß das regelmäßige n-Eck zwar nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar sei, wohl aber das regelmäßige r-Eck und das regelmäßige s-Eck, wobei r die Anzahl der anwesenden Carnevalia-Vorstände bezeichnet und s die der anwesenden sonstigen Carnevalia-Mitglieder. Was können Sie nun über n sagen?

Lösung: Das regelmäßige Neuneck ist nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar, da $9 = 3^2$ ist, und auch das 35-Eck ist nicht konstruierbar, denn $35 = 5 \cdot 7$, und sieben ist keine FERMATsche Primzahl. $12 = 2^2 \cdot 3$ und $24 = 2^3 \cdot 3$ sind dagegen beide Produkt einer Zweierpotenz mit der FERMATschen Primzahl drei, also sind das regelmäßige Zwölfeck und das 24-Eck konstruierbar. Das regelmäßige 36-Eck ist nicht konstruierbar, da 36 die Drei im Quadrat enthält. (Das 44-Eck ist auch nicht konstruierbar, da elf keine FERMATsche Primzahl ist.) Somit sind 36 Carnevalia-Mitglieder anwesend, zwölf davon Vorstände, und zwölf VAF-Mitglieder.

Aufgabe 5: *(8 Punkte)*

a) Faktorisieren Sie das Polynom $f = 12X^5 - 48X$ sowohl in $\mathbb{Q}[X]$ als auch in $\mathbb{Z}[X]$!

Lösung: $f = 12X(X^4 - 4) = 12X(X^2 + 2)(X^2 - 2)$. Die beiden quadratischen Polynome $X^2 \pm 2$ sind in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel, da sie sonst rationale Nullstellen haben müßten, und X als lineares Polynom ist ohnehin irreduzibel. Der Vorfaktor zwölf ist sowohl in $\mathbb{Q}$ als auch $\mathbb{Q}[X]$ eine Einheit. Die linearen und quadratischen Polynome sind primitiv, also nach GAUSS auch über $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel, allerdings läßt sich die Zwölf jetzt noch weiter zerlegen; die vollständige Zerlegung in $\mathbb{Z}[X]$ ist daher $f = 2^2 \cdot 3 \cdot X(X^2 + 2)(X^2 - 2)$.

b) Faktorisieren Sie f auch über dem Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$!

Lösung: In $K[X]$ ist $X^2 - 2 = (X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})$, während $X^2 + 2$ irreduzibel bleibt, denn $\sqrt{-2} \notin K$. Die Zerlegung ist somit $f = 12X(X - \sqrt{2})(X - \sqrt{2})(X^2 + 2)$, wobei die Zwölf natürlich auch in K eine Einheit ist.

c) Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper von f !

Lösung: Damit auch $X^2 + 2$ in Linearfaktoren zerfällt, brauchen wie $\sqrt{-2} = i\sqrt{2}$; somit ist $L = K(i) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-2})$ ein Zerfällungskörper von f.

d) Bestimmen Sie den Kern und das Bild des Homomorphismus

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{R} \\ \quad g \mapsto g(\sqrt{2}) \end{cases} \quad !$$

Lösung: Für $g = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0$ ist

$$\varphi(g) = \sum_{i=0}^{d} a_i \left(\sqrt{2}\right)^i = \sum_{j=0}^{[d/2]} a_{2j} 2^i + \left(\sum_{k=0}^{[(d-1)/2]} a_{2k+1} 2^k \right) \sqrt{2}\,,$$

liegt also stets in $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}\sqrt{2}$. Alle Elemente dieses Körpers liegen im Bild, denn für $a, b \in \mathbb{Q}$ ist $\varphi(bX + a) = a + b\sqrt{2}$, d.h. das Bild von φ ist $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}\sqrt{2}$.

Für ein g aus dem Kern müssen die beiden obigen Teilsummen beide verschwinden, denn sonst wäre $\sqrt{2}$ als Quotient zweier rationaler Zahlen darstellbar, also selbst rational. Damit verschwindet auch $g(-\sqrt{2})$, denn das ist derselbe Ausdruck mit minus statt plus zwischen den beiden Summanden. Somit ist g teilbar durch $X + \sqrt{2}$ und durch $X - \sqrt{2}$, also auch durch deren Produkt $X^2 - 2$. Umgekehrt verschwindet ein durch $X^2 - 2$ teilbares Polynom an der Stelle $\sqrt{2}$; der Kern von φ ist also das von $X^2 - 2$ erzeugte Hauptideal in $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 6: *(5 Punkte)*

$K/\mathbb{Q}$ sei eine GALOISsche endliche Körpererweiterung und $G = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\} = \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$.

a) Zeigen Sie, daß für jedes Element $x \in K$ die Elemente

$$N(x) = \prod_{i=1}^{r} \sigma_i(x) \quad \text{und} \quad S(x) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i(x)$$

in $\mathbb{Q}$ liegen! *(Hinweis: Betrachten Sie die Bilder der beiden Elemente unter den σ_i !)*

Lösung: Für jedes $\sigma \in G$ und $x \in K$ ist $\sigma\big(N(x)\big) = \prod_{i=1}^{r}(\sigma \circ \sigma_i)(x) = N(x)$, denn da G eine Gruppe ist, ist die Abbildung $\tau \mapsto \sigma \circ \tau$ bijektiv, so daß die Menge der $\sigma \circ \sigma_i$ gleich der der σ_i ist. Genauso ist $\sigma\big(S(x)\big) = \sum_{i=1}^{r}(\sigma \circ \sigma_i)(x) = S(x)$. Da $K/\mathbb{Q}$ GALOISsch ist und sowohl $N(x)$ als auch $S(x)$ im Fixkörper der GALOIS-Gruppe liegen, sind sie Elemente des Grundkörpers $\mathbb{Q}$.

b) Zeigen Sie, daß jedes Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$, das in einem $x \in K$ verschwindet, auch alle anderen $\sigma_i(x)$ als Nullstellen hat!

Lösung: Sei $f = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{Q}$. Für jede Nullstelle $x \in K$ von f ist

$$f\big(\sigma_i(x)\big) = a_d \sigma_i(x)^d + \cdots + a_1 \sigma_1(x) + a_0 = \sigma_i(a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0) = \sigma_i\big(f(x)\big) = \sigma_i(0) = 0\,,$$

denn $\sigma_i(a_j) = a_j$, da alle a_j in $\mathbb{Q}$ liegen.

c) Geben Sie für $K = \mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\big)$ die Zahlen $N(x)$ und $S(x)$ für $x = a + b\sqrt{2}$ explizit an!

Lösung: Da die Körpererweiterung Grad zwei hat, kann es höchstens zwei Automorphismen von $K/\mathbb{Q}$ geben. Einer ist natürlich die Identität σ_0, der andere die Konjugation σ_1 mit $\sigma_1\big(a + b\sqrt{2}\big) = a - b\sqrt{2}$. Somit ist $N\big(a + b\sqrt{2}\big) = \big(a + b\sqrt{2}\big)\big(a - b\sqrt{2}\big) = a^2 - 2b^2$ und $S\big(a + b\sqrt{2}\big) = \big(a + b\sqrt{2}\big) + \big(a - b\sqrt{2}\big) = 2a$.

Aufgabe 7: (*12 Punkte*)
K sei der kleinste Teilkörper von $\mathbb{C}$, der die Elemente $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{18}$ und $\sqrt{30}$ enthält.

a) Finden Sie eine möglichst einfache $\mathbb{Q}$-Vektorraumbasis von K!

Lösung: Da K sowohl $\sqrt{2}$ als auch $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ enthält, ist auch $\sqrt{3} \in K$. Das Element $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ liegt in jedem Körper, der $\sqrt{2}$ enthält, ist also überflüssig. Schließlich ist $\sqrt{30} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$; da $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ in K liegen, liegt also auch $\sqrt{5}$ in K. Somit läßt sich K auch einfacher charakterisieren als $K = \mathbb{Q}\big(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\big)$.
Da K durch eine Folge von drei quadratischen Erweiterungen aufgebaut werden kann, ist $[K : \mathbb{Q}] = 8$, die gesuchte Basis hat also acht Elemente. Eine möglichst einfache Basis sollte sicher die Eins sowie $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ enthalten; dazu empfehlen sich noch die Produkte von je zwei der Quadratwurzeln und das Produkt aller drei, was auf die Basis

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{30}$$

führt.

b) Geben Sie alle Monomorphismen $K \to \mathbb{C}$ bezüglich der gefundenen Basis explizit an!

Lösung: Offensichtlich ist so ein Monomorphismus durch die Bilder von $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ eindeutig festgelegt. Da jeder Monomorphismus $\sigma : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ auf $\mathbb{Q}$ die Identität ist und $\sqrt{a}$ Nullstelle des Polynoms $X^2 - a$ ist, kann das Bild von $\sqrt{a}$ nur $\sqrt{a}$ selbst oder $-\sqrt{a}$ sein. Es gibt somit, wie auf Grund der Dimension zu erwarten war, acht Monomorphismen, von denen wir nur angeben müssen, ob sie ein Basiselement auf sich selbst abbilden oder auf sein Negatives:

	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{15}$	$\sqrt{30}$
σ_0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
σ_1	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
σ_2	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
σ_3	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
σ_4	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
σ_5	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
σ_6	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
σ_7	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$

c) Bestimmen Sie die Gruppe $G = \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$ und entscheiden Sie, ob diese auflösbar ist!

Lösung: Alle Monomorphismen $\sigma_i\colon K \to \mathbb{C}$ bilden K auf sich selbst ab, können also auch als Automorphismen von K betrachtet werden (die $\mathbb{Q}$ automatisch festlassen). G besteht also aus diesen acht Automorphismen; da σ_i^2 in allen Fällen gleich der Identität ist, ist diese Gruppe abelsch, also erst recht auflösbar. (Als abstrakte Gruppe ist sie isomorph zu $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.)

d) Ist $K/\mathbb{Q}$ GALOISsch?

Lösung: Ja, denn ist für

$$x = a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{5} + a_4\sqrt{6} + a_5\sqrt{10} + a_6\sqrt{15} + a_7\sqrt{30}$$

ein a_i mit $i > 0$ von Null verschieden, gibt es stets Automorphismen σ_i, die diesen Koeffizienten in sein Negatives verkehren, so daß $\sigma_i(x) \neq x$ ist. Fix unter allen Automorphismen bleiben somit nur die $x \in K$ mit $a_1 = \cdots = a_7 = 0$, also die Elemente von $\mathbb{Q}$.

e) Geben Sie alle Zwischenkörper L mit $\mathbb{Q} \subset L \subset K$ explizit an und entscheiden Sie jeweils, ob $L/\mathbb{Q}$ GALOISsch ist oder nicht!

Lösung: Da die GALOIS-Gruppe abelsch ist, ist jede Untergruppe Normalteiler, d.h. jeder Zwischenkörper ist GALOISsch über $\mathbb{Q}$. Zwischenkörper vom Grad zwei über $\mathbb{Q}$ sind die sieben Körper, die von einer der Quadratwurzeln über $\mathbb{Q}$ erzeugt werden; sie sind die Fixkörper der Untergruppe bestehend aus den σ_i, die diese Quadratwurzel festlassen.

Zwischenkörper vom Grad vier über $\mathbb{Q}$ sind entsprechend die, die von zweien dieser Quadratwurzeln erzeugt werden, allerdings führen nicht alle Paare von Quadratwurzeln zu verschiedenen Körpern. Diese Zwischenkörper sind Fixkörper von Untergruppen der Ordnung zwei, d.h. es sind die sieben Fixkörper von σ_1 bis σ_7. Der von σ_1 ist $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$, der von σ_2 ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$, der von σ_3 ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, der von σ_4 ist $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{6})$, der von σ_5 ist $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{10})$, der von σ_6 ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{15})$, der von σ_7 ist $\mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10})$. Diese Körper enthalten natürlich auch noch alle anderen Quadratwurzeln, die vom jeweiligen σ_i festgelassen werden, aber die lassen sich aus den beiden angegebenen kombinieren: Ein Körper, der $\sqrt{6}$ und $\sqrt{10}$ enthält, enthält beispielsweise auch deren Produkt $\sqrt{60} = 4\sqrt{15}$, und damit auch $\sqrt{15}$. Insgesamt gibt es also vierzehn echte Zwischenkörper.

f) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ derart, daß K ein Zerfällungskörper von f ist!

Lösung: K ist der kleinste Teilkörper von $\mathbb{C}$, der $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ enthält und ist somit ein Zerfällungskörper des Polynoms $f = (X^2-2)(X^2-3)(X^2-5) = X^6 - 10X^4 + 31X^2 - 30$.