Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6,26, A4.18

1. Februar 2020

Modulklausur Algebra

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Aufgabe 1: (*6 Punkte)*

Bestimmen Sie alle Lösungen (einschließlich Vielfachheiten) der folgenden Gleichungen:

a) $x^2 - 2x + 9 = 2i(x-1)$

b) $x^8 - x^7 + x^6 - x^5 - 2x^4 + 2x^3 = 0$

Aufgabe 2: (*14 Punkte)*

a) Zeigen Sie auf zwei verschiedene Arten, daß die Menge $\mathfrak{A}_n$ aller gerader Permutationen ein Normalteiler der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ aller Permutationen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ ist!

b) Zeigen Sie, daß die von der Transposition $(1\ 2)$ erzeugte Untergruppe für $n > 2$ kein Normalteiler ist!

c) Zeigen Sie, daß der Durchschnitt zweier Normalteiler einer Gruppe G wieder ein Normalteiler von G ist!

d) Zeigen Sie, daß $\mathfrak{S}_n$ für $n \geq 5$ keinen zyklischen Normalteiler (außer $\{\mathrm{id}\}$) hat!

e) Für welche $m < n$ ist $\mathfrak{S}_m$ ein Normalteiler von $\mathfrak{S}_n$?

f) Zeigen Sie, daß $\mathfrak{S}_3$ isomorph zur Diedergruppe D_3 ist und daß diese Gruppe einen zyklischen Normalteiler hat!

Aufgabe 3: (*7 Punkte)*

Zeigen Sie:

a) Der Ring der ganzen Zahlen modulo einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.

b) Geben Sie die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/12)^\times$ explizit an! Ist diese Gruppe zyklisch?

c) Ist die Gruppe $(\mathbb{Z}/31)^\times$ zyklisch?

d) Bestimmen Sie in $(\mathbb{Z}/31)^\times$ das Inverse von drei!

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 4: *(8 Punkte)*

Zur Vorbereitung des Fastnachtsumzugs treffen sich insgesamt achtundvierzig Vertreter der lokalen Vereine Carnevalia und VAF (Verein antialkoholischer Fastnachter) in einem Restaurant. Die Mitglieder aus dem Vorstand von Carnevalia trinken je ein Glas Sekt für dreizehn Euro, die (etwas zahlreicher erschienenen) sonstigen Mitglieder trinken je ein Glas Weinschorle für fünf Euro, und die VAF-Vertreter je ein Mineralwasser für zwei Euro. Insgesamt kassiert der Wirt 333 Euro, von denen allerdings 33 auf Trinkgelder entfallen.

a) Was können Sie über die mögliche (Gesamt-)Anzahl n von anwesenden Carnevalia-Mitgliedern sagen?

b) Einer der Vorstände von Carnevalia erwähnt, daß das regelmäßige n-Eck zwar nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar sei, wohl aber das regelmäßige r-Eck und das regelmäßige s-Eck, wobei r die Anzahl der anwesenden Carnevalia-Vorstände bezeichnet und s die der anwesenden sonstigen Carnevalia-Mitglieder. Was können Sie nun über n sagen?

Aufgabe 5: *(8 Punkte)*

a) Faktorisieren Sie das Polynom $f = 12X^5 - 48X$ sowohl in $\mathbb{Q}[X]$ als auch in $\mathbb{Z}[X]$!

b) Faktorisieren Sie f auch über dem Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$!

c) Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper von f!

d) Bestimmen Sie den Kern und das Bild des Homomorphismus

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{R} \\ \quad g \mapsto g(\sqrt{2}) \end{cases} \quad !$$

Aufgabe 6: *(5 Punkte)*

$K/\mathbb{Q}$ sei eine GALOISsche endliche Körpererweiterung und $G = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\} = \operatorname{Aut}(K/\mathbb{Q})$.

a) Zeigen Sie, daß für jedes Element $x \in K$ die Elemente

$$N(x) = \prod_{i=1}^{r} \sigma_i(x) \quad \text{und} \quad S(x) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i(x)$$

in $\mathbb{Q}$ liegen! *(Hinweis: Betrachten Sie die Bilder der beiden Elemente unter den σ_i!)*

b) Zeigen Sie, daß jedes Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$, das in einem $x \in K$ verschwindet, auch alle anderen $\sigma_i(x)$ als Nullstellen hat!

c) Geben Sie für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ die Zahlen $N(x)$ und $S(x)$ für $x = a + b\sqrt{2}$ explizit an!

Aufgabe 7: *(12 Punkte)*

K sei der kleinste Teilkörper von $\mathbb{C}$, der die Elemente $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{18}$ und $\sqrt{30}$ enthält.

a) Finden Sie eine möglichst einfache $\mathbb{Q}$-Vektorraumbasis von K!

b) Geben Sie alle Monomorphismen $K \to \mathbb{C}$ bezüglich der gefundenen Basis explizit an!

c) Bestimmen Sie die Gruppe $G = \operatorname{Aut}(K/\mathbb{Q})$ und entscheiden Sie, ob diese auflösbar ist!

d) Ist $K/\mathbb{Q}$ GALOISsch?

e) Geben Sie alle Zwischenkörper L mit $\mathbb{Q} \subset L \subset K$ explizit an und entscheiden Sie jeweils, ob $L/\mathbb{Q}$ GALOISsch ist oder nicht!

f) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ derart, daß K ein Zerfällungskörper von f ist!