WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

9. Dezember 2020

11. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie für jede der folgenden Gruppen deren Zentrum:
a) $\mathfrak{A}_5$ *b)* $\mathfrak{S}_5$ *c)* D_3 *d)* V_4 *e)* $GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A \neq 0\}$

Lösung:

a) $\mathfrak{A}_5$ ist eine einfache Gruppe, hat also keine Normalteiler außer sich selbst und $\{\mathrm{id}\}$. Das Zentrum ist ein Normalteiler, und da $\mathfrak{A}_5$ nicht abelsch ist, kann es nicht die ganze Gruppe sein. Somit besteht es nur aus der Identität.

b) Nach *a)* kann das Zentrum kein Element von $\mathfrak{A}_5$ enthalten außer der Identität. Da das Produkt zweier ungerader Permutationen gerade ist, kann es daher außer der Identität höchstens noch ein weiteres Element enthalten, das die Ordnung zwei haben muß. Es läßt sich daher schreiben als Produkt elementfremder Transpositionen. Durch Konjugation mit einer weiteren Transposition läßt es sich aber in ein anderes solches Produkt überführen, so daß eine derartige zweielementige Gruppe kein Normalteiler sein kann. Daher ist auch das Zentrum der $\mathfrak{S}_5$ trivial.

c) D_3 ist die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks. Da jede Symmetrieoperation durch ihre Wirkung auf die Ecken eindeutig festgelegt ist und sich umgekehrt jede Permutation der Ecken durch eine Symmetrieoperation realisieren läßt, ist D_3 isomorph zu $\mathfrak{S}_3$. Deren einziger Normalteiler ist die $\mathfrak{A}_3$, die in D_3 der Untergruppe der Drehungen entspricht. Sie liegt nicht im Zentrum, denn beispielsweise ist in $\mathfrak{S}_3$

$$(1\ 2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3)\,, \quad \text{aber} \quad (1\ 2)(1\ 2\ 3) = (2\ 3)\,.$$

Somit ist auch hier das Zentrum trivial.

d) V_4 ist eine abelsche Gruppe; das Zentrum ist somit gleich der gesamten Gruppe.

e) Jede Matrix aus $GL_2(\mathbb{R})$ ist konjugiert zu einer JORDAN-Matrix $J = \begin{pmatrix} s & a \\ 0 & t \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}^\times$ und $a \in \{0, 1\}$. Mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad A^{-1}JA = AJA = \begin{pmatrix} t & 0 \\ a & s \end{pmatrix}.$$

Eine Matrix aus dem Zentrum bleibt unter Konjugation mit einer beliebigen anderen Matrix invariant; sie muß also sowohl gleich ihrer JORDAN-Normalform J als auch gleich $A^{-1}JA$ sein. Das geht nur, wenn $s = t$ und $a = 0$ ist. Die Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{smallmatrix}\right)$ liegen in der Tat alle im Zentrum, denn multipliziert man sie von links oder von rechts mit einer beliebigen Matrix, werden stets deren sämtliche Elemente mit t multipliziert.

f) Zeigen Sie: Für zwei Gruppen G und H ist $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$!

Lösung: $(g, h) \in G \times H$ liegt genau dann im Zentrum, wenn für alle $(x, y) \in G \times H$ gilt

$$(x, y)(g, h) = (g, h)(x, y)\,, \quad \text{d.h.} \quad (xg, yh) = (gx, hy)\,.$$

Das wiederum bedeutet, daß für alle $x \in G$ gilt $xg = gx$, und für alle $y \in H$ ist $yh = hy$. Das ist äquivalent dazu, daß g in $Z(G)$ und h in $Z(H)$ liegt.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Ein Winkel α kann genau dann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, wenn eine Strecke der Länge $\cos\alpha$ mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.

Lösung: Wir starten wie üblich mit den beiden Punkten $P_0 = (0,0)$ und $P_1 = (1,0)$. Dann konstruieren wir den Kreis um P_0 durch P_1.

Falls ein Winkel α konstruiert werden kann, können wir einen Strahl ausgehend von P_0 konstruieren, der mit P_0P_1 den Winkel α einschließt. Das Lot von seinem Schnittpunkt mit dem Einheitskreis auf die x-Achse hat als Fußpunkt einen Punkt P_2 mit Koordinaten $(\cos\alpha, 0)$.

Falls eine Strecke der Länge $\cos\alpha$ konstruiert werden kann, können wir auch den Punkt P_2 mit Koordinaten $(\cos\alpha, 0)$ konstruieren und dazu die Senkrechte zur x-Achse durch P_2. Sie schneidet den Einheitskreis in einem Punkt P_3 mit der Eigenschaft, daß der Strahl von P_0 durch P_3 mit P_0P_1 den Winkel α einschließt.

b) Wir betrachten α als Variable und definieren die Körper $K = \mathbb{Q}(\cos\alpha)$ und $L = \mathbb{Q}\big(\cos\frac{\alpha}{3}\big)$. Zeigen Sie, daß L/K eine algebraische Erweiterung ist, und bestimmen Sie deren Grad!

Lösung: Ist $x = \cos\frac{\alpha}{3}$ und $y = \sin\frac{\alpha}{3}$, so ist

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha} = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i\,.$$

Da $x^2 + y^2 = 1$ ist, folgt $\cos\alpha = x^3 - 3xy^2 = x^3 - 3x(1-x^2) = 4x^3 - 3x$.

L/K läßt sich also erzeugen durch Adjunktion einer Nullstelle des kubischen Polynoms $4X^3 - 3X - \cos\alpha$. Die Körpererweiterung L/K hat somit den Grad drei.

Aufgabe 3: *(7 Punkte)*

Zu den in der klassischen griechischen Mathematik betrachteten Konstruktionen, die nicht mit Zirkel und Lineal ausgeführt wurden, zählt die sogenannte *Quadratrix* oder *Trisektrix*. Zu ihrer Konstruktion bewegt sich eine zur x-Achse parallele Gerade g mit konstanter Geschwindigkeit von der Höhe $y = 1$ auf die Höhe $y = 0$. Gleichzeitig bewegt sich eine Gerade h durch den Nullpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit vom Steigungswinkel 90° zum Steigungswinkel 0° so, daß beide Geraden gleichzeitig ihre Endposition erreichen. Die Quadratrix ist die Menge aller Punkte, in denen sich die beiden Geraden auf ihrem Weg schneiden.

a) Zeigen Sie: Diese Kurve hat, wenn man von den Endpunkten absieht, die Parameterdarstellung

$$\varphi\colon \begin{cases} (0,\ 1) \to \mathbb{R}^2 \\ \qquad t \mapsto \left(\dfrac{1-t}{\tan\frac{\pi}{2}(1-t)}, 1-t\right) \end{cases}$$

Lösung: Wir wählen den Zeitparameter so, daß die Geraden zur Zeit $t = 0$ starten und zur Zeit $t = 1$ ihre Endposition erreichen. Zum Zeitpunkt $t \in [0,\ 1]$ hat daher die Gerade parallel zur x-Achse die Gleichung $y = 1 - t$, und die andere hat den Steigungswinkel $\frac{1}{2}(1-t)\pi$. Für $t \in (0,\ 1)$ hat sie somit die Gleichung

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right) \cdot x\,.$$

Sie schneidet die achsenparallele Gerade in einem Punkt mit y-Koordinate $1 - t$; die x-Koordinate dazu ist

$$\frac{1-t}{\tan\frac{\pi}{2}(1-t)}\,.$$

Daraus folgt die zu beweisende Parameterdarstellung.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t)$ und $\lim\limits_{t\to 1} \varphi(t)$!

Lösung: Für $t \to 0$ wird der Nenner der x-Koordinate unendlich, da der Tangens bei $x = \frac{\pi}{2}$ einen Pol hat. Der Zähler geht gegen eins, d.h. $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = (0, 1)$.

Für $t \to 1$ gehen Zähler und Nenner der x-Koordinate gegen Null, und nach DE L'HÔPITAL ist

$$\lim_{t\to 1} \frac{1-t}{\tan \frac{\pi}{2}(1-t)} = \lim_{t\to 1} \frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right)^2\right)} = \frac{2}{\pi},$$

denn $\tan 0 = 0$. Somit ist $\lim\limits_{t\to 1} \varphi(t) = (2/\pi, 0)$.

c) Zeigen Sie, daß mit Hilfe dieser Kurve ein Quadrat konstruiert werden kann, dessen Fläche gleich derer des Einheitskreises ist!

Lösung: Da mit dieser Kurve der Punkt $(2\pi, 0)$ konstruiert werden kann, läßt sich auch eine Strecke der Länge $2/\pi$ konstruieren und damit, da alle Verknüpfungen mit Grundrechenarten mit Zirkel und Linear durchgeführt werden können, eine der Länge π. Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, läßt sich dann auch über den Höhensatz eine Strecke der Länge $\sqrt{\pi}$ konstruieren, und das ist die Seite des gesuchten Quadrats.

d) Zeigen Sie, daß mit Hilfe dieser Kurve für jede natürliche Zahl n und jeden vorgegebenen Winkel α der Winkel $\frac{1}{n}\alpha$ konstruiert werden kann!

Lösung: Wir starten mit irgendwelchen Punkten Q_0 und Q_1 und tragen die Strecke $\overline{Q_0Q_1}$ mehrfach auf der Geraden Q_0Q_1 ab bis wir dort eine Folge von Punkten $Q_0, \dots, Q_n$ haben, die sich immer weiter von Q_0 entfernen derart, daß alle Strecken $\overline{Q_iQ_{i+1}}$ die gleiche Länge haben wie $\overline{Q_0Q_1}$. Damit ist die Strecke $\overline{Q_0Q_n}$ in n gleich lange Teilstrecken unterteilt.

Mit Hilfe des Strahlensatzes läßt sich dann auch eine beliebige vorgegebene Strecke in n gleich lange Teilstrecken unterteilen: Man zeichnet die Strecke als $\overline{AB}$ parallel zur Geraden Q_0Q_n und konstruiert den Schnittpunkt Z der Geraden AQ_0 und BQ_n. (Falls diese Geraden parallel sein sollte, muß man im weiteren Verlauf mit Parallelen statt mit Geraden durch Z arbeiten.) Die Geraden ZQ_i schneiden dann AB in den gewünschten Teilungspunkten A_i.

Nun sei α ein vorgegebener Winkel, realisiert durch eine Gerade durch den Nullpunkt mit Winkel α zur x-Achse. Sie schneide die Trisektrix im Punkt S, und der Fußpunkt des Lots von S auf die x-Achse sei R. Die Strecke $\overline{RS}$ kann durch Punkte $R = R_0, R_1, \dots, R_n = S$ in n gleich lange Teilstrecken unterteilt werden, und zu jedem Punkt R_i sei T_i der Schnittpunkt der zur x-Achse parallelen Geraden durch R_i mit der Trisektrix. Dann schließt jeder Strahl vom Nullpunkt durch T_i mit dem durch T_{i+1} einen Winkel α/n ein, denn für die Punkte auf der Trisektrix sind die Winkel proportional zu den y-Koordinaten.