WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6, B4.18

1. Dezember 2020

10. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*
Wir starten mit den Punkten $P_0 = (0,0)$ und $P_1 = (1,0)$ der EUKLIDischen Ebene.

a) Geben Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal an für den Punkt $Q_1 = (1,1)$!

Lösung: Q_1 liegt auf der Senkrechten zur Geraden P_0P_1 durch den Punkt P_1. Diese kann als Mittelsenkrechte wie folgt konstruiert werden: Der Kreis um P_1 durch P_0 schneidet die Gerade P_0P_1 in P_1 und $P_2 = (2,0)$. Die Kreise um P_0 und P_2 mit einem gleichen Radius, der größer ist als die Länge der Strecke $\overline{P_0P_1}$, schneiden sich in zwei Punkten, deren Verbindungsgerade senkrecht auf P_0P_1 steht und durch P_1 geht. Der gesuchte Punkt Q_1 ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Kreis um P_1 durch P_0 (und P_2).

b) Q_2 sei der Schnittpunkt des Kreises um P_0 durch Q_1 mit der Geraden P_0P_1 rechts von P_1, und Q_3, Q_4 seien die beiden Schnittpunkte des Kreises um Q_2 durch Q_1 mit der Geraden P_0P_1. Bestimmen Sie die Koordinaten von Q_3, Q_4 und den Grad des kleinsten Teilkörpers von $\mathbb{R}$, der diese Koordinaten enthält, über $\mathbb{Q}$!

Lösung: Der Radius des Kreises um P_0 durch Q_1 ist der Abstand von P_0 und Q_1, also $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Somit hat Q_2 die Koordinaten $(\sqrt{2}, 0)$. Der Kreis um Q_2 durch Q_1 hat den Radius

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}\,.$$

Die drei Punkte Q_2, Q_3 und Q_4 liegen auf der Geraden P_0P_1, also der x-Achse, und der Abstand zwischen Q_2 und Q_3 *bzw.* Q_4 ist jeweils r. Somit haben diese beiden Punkte die Koordinaten $\left(\sqrt{2} \pm \sqrt{4-2\sqrt{2}},\ 0\right)$.

$Q_2 = \left(\sqrt{2}, 0\right)$ hat Koordinaten im Körper $L = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, und $[L : \mathbb{Q}] = 2$. Die Koordinaten von Q_3 und Q_4 liegen in $K = L\left(\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)$; da auch diese Körpererweiterung durch Adjunktion einer Quadratwurzel gegeben ist, folgt $[K : L] = 2$ und $[K : \mathbb{Q}] = 4$.

c) Eine Strecke $\overline{PQ}$ wird durch einen inneren Punkt R im Verhältnis des goldenen Schnitts geteilt, wenn das Verhältnis der Länge von $\overline{PQ}$ zu der von $\overline{PR}$ gleich dem der Längen von $\overline{PR}$ zu $\overline{RQ}$ ist. Kann der Punkt R mit Zirkel und Lineal konstruiert werden?

Lösung: Wir wählen das Koordinatensystem so, daß $P = (0,0)$ und $Q = (1,0)$ ist, Dann ist $R = (x,0)$ mit $0 < x < 1$. Die Strecke $\overline{PQ}$ hat die Länge eins, $\overline{PR}$ hat die Länge x, und $\overline{RQ}$ entsprechend $1-x$. Die Bedingung für den goldenen Schnitt besagt also, daß $1 : x = x : (1-x)$ sein soll. Multiplikation mit $x(1-x)$ mach daraus die quadratische Gleichung $1-x = x^2$ oder $x^2 + x = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 1$. Die Lösungen sind also $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Die Lösung mit dem Minuszeichen ist negativ und kommt daher nicht in Frage; somit ist

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}818033988\,.$$

x liegt im Körper $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$; da dieser eine quadratische Erweiterung von Q ist, kann der Punkt R mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

Aufgabe 2: *(12 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für jede n-te Einheitswurzel ζ außer der Eins gilt $1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{n-1}=0$!

Lösung: Sei $s=1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{n-2}+\zeta^{n-1}$. Dann ist $\zeta s=\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\cdots+\zeta^{n-1}+1=s$, also ist $(\zeta-1)s=0$. Für $\zeta\neq 1$ ist $\zeta-1\neq 0$, also muß $s=0$ sein.

b) Speziell im Fall $n=5$ kann diese Gleichung auch geschrieben werden als

$$\frac{1}{\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}+1+\zeta+\zeta^2=0\,,$$

Zeigen Sie, daß sich das mit $w=\zeta+1/\zeta$ auch schreiben läßt als $w^2+w=1$!

Lösung: Die Gleichung

$$\frac{1}{\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}+1+\zeta+\zeta^2=0$$

entsteht natürlich aus $1+\zeta+\cdots+\zeta^4=0$ nach Division durch ζ^2. Das Quadrat von w ist ζ^2+2+2/ζ^2, also ist

$$w^2+w=\frac{1}{\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}+2+\zeta+\zeta^2=1\,.$$

c) Berechnen Sie w sowie den Real- und den Imaginärteil von $\omega=e^{2\pi i/5}$ durch Wurzelausdrücke!

Lösung: w genügt der gleichen quadratischen Gleichung wie das x aus Aufgabe 1*c)*. Wenn wir $\zeta=\omega=e^{2\pi i/5}$ betrachten, haben sowohl ζ als auch $\zeta^{-1}=\bar\zeta$ positiven Realteil, so daß $w=\bigl(\sqrt5-1\bigr)/2$ ist.
Aus $w=\omega+\omega^{-1}=\omega+\overline{\omega}$ folgt, daß $w=2\,\mathfrak{Re}\,\omega$ ist, also ist

$$\mathfrak{Re}\,\omega=\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{w}{2}=\frac{\sqrt5-1}{4}\,.$$

$\mathfrak{Im}\,\omega=\sin(2\pi/5)$ ist ebenfalls positiv, also die positive Quadratwurzel aus

$$1-\cos^2\frac{2\pi}{5}=1-\left(\frac{\bigl(\sqrt5-1\bigr)^2}{16}\right)=\frac{16-5-1+2\sqrt5}{16}=\frac{10+2\sqrt5}{16}=\frac{5+\sqrt5}{8}\,,$$

d.h.

$$\mathfrak{Im}\,\omega=\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{8}}\,.$$

d) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper in der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$!

Lösung: Wir kennen den Zwischenkörper $\mathbb{Q}(w)=\mathbb{Q}\bigl(\sqrt5\bigr)$. Der Körper $K=\mathbb{Q}(\omega)$ entsteht daraus durch Adjunktion der Wurzel aus $\frac18\bigl(5+\sqrt5\bigr)$, ist also quadratisch über $\mathbb{Q}(w)$ und damit vom Grad vier über $\mathbb{Q}$. Der Automorphismus von $\mathbb{Q}(\omega)$, der ω abbildet auf ω^2, bildet ω^2 auf auf $\omega^4=\overline{\omega}$; er hat also die komplexe Konjugation als Quadrat und hat damit die Ordnung vier. Somit ist die GALOIS-Gruppe zyklisch von der Ordnung vier. Da sie nur eine Untergruppe der Ordnung zwei hat (die von der komplexen Konjugation erzeugte), gibt es auch nur einen Zwischenkörper, nämlich den Fixkörper $\mathbb{Q}(w)$ der komplexen Konjugation.

e) Wie läßt sich das regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruieren?

Lösung: Wir gehen aus von den beiden Punkten $P_0 = (0,0)$ und $P_1 = (1,0)$. Konstruiert werden soll das regelmäßige Fünfeck mit dem Kreis um P_0 durch P_1 als Umkreis und P_1 als einer seiner Ecken. Sobald wir die der komplexen Zahl ω entsprechende Ecke P_2 konstruiert haben, lassen sich die restlichen Ecken leicht finden: Die Ecke P_3 zu ω^2 ist Schnittpunkt des Kreises um P_2 durch P_1 mit dem Einheitskreis, P_4 entsprechend für den Kreis um P_3 durch P_2 und P_5 beispielsweise für den Kreis um P_1 durch P_2. Die Punkte $P_1, \ldots, P_5$ sind dann die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks.

ω hat den Realteil $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$. Wir konstruieren zunächst eine Strecke der Länge $\sqrt{5}$: Dazu konstruieren wir ausgehend von P_0 und P_1 durch sukzessives Abtragen der Strecke $\overline{P_0P_1}$ den Punkt $M = (3,0)$ und zeichnen den Kreis um M durch P_0. Sein anderer Schnittpunkt mit der Geraden P_0P_1 ist $Q_0 = (6,0)$, und der Kreis ist der THALES-Kreis über der Strecke $\overline{P_0Q_0}$.

Als nächstes konstruieren wir analog zur Vorgehensweise bei Aufgabe 1*a)* die Senkrechte zu P_0P_1 durch P_1; einer ihrer Schnittpunkte mit dem THALES-Kreis sei R. Nach dem Satz des THALES ist $\triangle P_1Q_0R$ rechtwinklig, und nach dem Höhensatz ist die Länge der Höhe $\overline{P_1R}$ die Wurzel aus dem Produkt der Streckenlängen $\overline{P_0P_1}$ und $\overline{P_1Q_0}$. Somit hat $\overline{P_1R}$ die Länge $\sqrt{5}$. Ist Q_1 der Schnittpunkt dieser Strecke mit dem Kreis um P_1 durch P_0, so hat $\overline{Q_1R}$ die Länge $\sqrt{5}-1$. Durch Konstruktion der Mittelsenkrechten können wir diese Strecke halbieren und auch das Ergebnis noch einmal halbieren; damit ist eine Strecke der Länge $\mathfrak{Re}\,\omega$ gefunden. Diese kann auf der Strecke $\overline{P_0P_1}$ abgetragen werden, so daß wir dort eine Strecke $\overline{P_0Q_2}$ der Länge $\mathfrak{Re}\,\omega$ haben. Die Senkrechte zu P_0P_1 durch Q_2 schneidet den Einheitskreis in den Eckpunkten P_2 und P_5 des zu konstruierenden regelmäßigen Fünfecks, womit nun – wie oben skizziert – leicht die noch fehlenden Eckpunkte konstruiert werden können.

(Es gibt natürlich einfachere und elegantere Konstruktionen.)

f) Leiten Sie daraus eine Konstruktionsvorschrift für das regelmäßige Fünfzehneck ab!

Lösung: 15 ist das Produkt der zueinander teilerfremden Zahlen drei und fünf; sowohl das regelmäßige Dreieck als auch das regelmäßige Fünfeck können mit Zirkel und Lineal konstruiert werden. Für das Dreieck konstruieren wir im Einheitskreis zunächst das regelmäßige Sechseck, indem wir den Kreis um P_1 durch P_0 mit dem Einheitskreis schneiden; die beiden Schnittpunkte seien S_1 und S_5. Damit lassen sich analog zu oben die restlichen Ecken S_2, S_3, S_4 des regelmäßigen Sechsecks $P_0S_1S_2S_3S_4S_5$ konstruieren, und $\triangle P_0S_2S_4$ ist ein gleichseitiges Dreieck.

Der ggT eins von drei und fünf ist gleich $2 \cdot 3 - 5$; damit ist

$$\frac{1}{15} = \frac{2 \cdot 3}{15} - \frac{5}{15} = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \frac{2\pi}{15} = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{5}\,.$$

Der Winkel $2\pi/3$ ist der Winkel zwischen den Geraden P_0P_1 und P_0S_2, sein Doppeltes der zwischen P_0P_1 und P_0S_4. Der Winkel $2\pi/5$ ist der zwischen P_0P_1 und P_0P_2. Damit läßt sich auch die Differenz $2\pi/15$ dieser Winkel konstruieren als ein Winkel zwischen zwei Geraden P_0A_1 und P_0A_2 mit A_1 und A_2 auf dem Einheitskreis. A_1 und A_2 sind dann zwei benachbarte Ecken des regelmäßigen Fünfzehnecks, und daraus lassen sich dann leicht die restlichen Ecken $A_3, \ldots, A_{15}$ konstruieren.