

1. Dezember 2020

## 10. Übungsblatt Algebra

### Aufgabe 1: (8 Punkte)

Wir starten mit den Punkten  $P_0 = (0, 0)$  und  $P_1 = (1, 0)$  der EUKLIDISCHEN Ebene.

- Geben Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal an für den Punkt  $Q_1 = (1, 1)$ !
- $Q_2$  sei der Schnittpunkt des Kreises um  $P_0$  durch  $Q_1$  mit der Geraden  $P_0P_1$  rechts von  $P_1$ , und  $Q_3, Q_4$  seien die beiden Schnittpunkte des Kreises um  $Q_2$  durch  $Q_1$  mit der Geraden  $P_0P_1$ . Bestimmen Sie die Koordinaten von  $Q_3, Q_4$  und den Grad des kleinsten Teilkörpers von  $\mathbb{R}$ , der diese Koordinaten enthält, über  $\mathbb{Q}$ !
- Eine Strecke  $\overline{PQ}$  wird durch einen inneren Punkt  $R$  im Verhältnis des goldenen Schnitts geteilt, wenn das Verhältnis der Länge von  $\overline{PQ}$  zu der von  $\overline{PR}$  gleich dem der Längen von  $\overline{PR}$  zu  $\overline{RQ}$  ist. Kann der Punkt  $R$  mit Zirkel und Lineal konstruiert werden?

### Aufgabe 2: (12 Punkte)

- Zeigen Sie: Für jede  $n$ -te Einheitswurzel  $\zeta$  außer der Eins gilt  $1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{n-1} = 0$ !
- Speziell im Fall  $n = 5$  kann diese Gleichung auch geschrieben werden als

$$\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} + 1 + \zeta + \zeta^2 = 0,$$

Zeigen Sie, daß sich das mit  $w = \zeta + 1/\zeta$  auch schreiben läßt als  $w^2 + w = 1$ !

- Berechnen Sie  $w$  sowie den Real- und den Imaginärteil von  $\omega = e^{2\pi i/5}$  durch Wurzelausdrücke!
- Bestimmen Sie alle Zwischenkörper in der Körpererweiterung  $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$ !
- Wie läßt sich das regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruieren?
- Leiten Sie daraus eine Konstruktionsvorschrift für das regelmäßige Fünfeck ab!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 8. Dezember 2020, um 15.20 Uhr