Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 B6, B4.18

25. November 2020

9. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}(\sqrt{28}, \sqrt{35})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{7} - \sqrt{5})$ denselben Teilkörper K von $\mathbb{R}$ definieren!

b) Welchen Grad hat die Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$? Geben Sie eine möglichst einfache Basis von $K/\mathbb{Q}$ an!

c) Zeigen Sie, daß $K/\mathbb{Q}$ Galoissch ist, und bestimmen Sie $\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$!

d) Bestimmen Sie alle Körper L mit $\mathbb{Q} < L < K$!

e) Finden Sie ein irreduzibles Polynom f derart, daß $K \cong \mathbb{Q}[X]/(f)$ ist!

f) Zerlegen Sie f über dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ in seine irreduziblen Faktoren!

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

G sei eine Gruppe, und $\chi_1, \dots, \chi_r$ seien paarweise verschiedene Gruppenhomomorphismen von G in die multiplikative Gruppe $\mathbb{Q}^\times$. Zeigen Sie, daß die χ_i linear unabhängig sind, d.h. falls $a_1\chi_1(x) + \cdots + a_r\chi_r(x) = 0$ für alle $x \in G$ und irgendwelche $a_i \in \mathbb{Q}$, müssen alle a_i verschwinden. *(Hinweis: Benutzen Sie die Methode, mit der in der Vorlesung die „lineare Unabhängigkeit“ für Monomorphismen von Körpern bewiesen wurde!)*

Aufgabe 3: *(7 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Eine Untergruppe $U < \mathfrak{S}_n$ der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ ist genau dann ein Normalteiler, wenn für jede Transposition $(a\ b) \in \mathfrak{S}_n$ und jede Permutation $\pi \in U$ gilt: $(a\ b)\pi(a\ b) \in U$.

b) $U \le \mathfrak{S}_4$ sei die von den beiden Permutationen $(1\ 2)(3\ 4)$ und $(1\ 3)(2\ 4)$ erzeugte Untergruppe. Wie viele Elemente hat U?

c) Ist U zyklisch?

d) Zeigen Sie, daß U ein Normalteiler von $\mathfrak{S}_4$ ist!
Hinweis: Betrachten Sie alle Produkte $(e\ f)(a\ b)(c\ d)(e\ f)$ mit $\{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\{e, f\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$, und überlegen Sie sich, daß das Ergebnis in erster Linie davon abhängt, wie viele Elemente $\{a, b\} \cap \{e, f\}$ hat.

e) Folgern Sie, daß $\mathfrak{S}_4$ eine auflösbare Gruppe ist!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 1. Dezember 2020, um 15.20 Uhr