Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

18. November 2019

8. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie über $\mathbb{Q}$ den Zerfällungskörper K des Polynoms $f = X^3 - 1$ und den Zerfällungskörper L von $g = X^2 + 3$ und geben Sie jeweils eine $\mathbb{Q}$-Vektorraumbasis dieses Körpers an!

Lösung: $X^3 - 1$ hat in $\mathbb{Q}$ die Eins als Nullstelle; $h = (X^3 - 1)/(X - 1) = X^2 + X + 1$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$ mit Nullstellen $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ in $\mathbb{C}$. Der Zerfällungskörper von f ist daher gleich $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ und hat beispielsweise 1 und $\sqrt{-3}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraumbasis.

g ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ mit Nullstellen $\pm\sqrt{-3}$; der Zerfällungskörper ist also auch hier $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

b) Zeigen Sie, daß K und L isomorph sind!

Lösung: Das ist klar, da wir in *a)* gesehen haben, daß beide isomorph zu $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ sind.

c) Gibt es auch einen Isomorphismus $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 1) \to \mathbb{Q}[X]/(X^2 + 3)$?

Lösung: Den kann es schon deshalb nicht geben, weil $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 1)$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum dreidimensional ist, $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 3)$ aber zweidimensional. Außerdem hat $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 1)$ Nullteiler, denn ist x die Restklasse von X, so ist $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$, obwohl keiner der beiden Faktoren verschwindet.

d) Bestimmen Sie die Automorphismengruppen von $K/\mathbb{Q}$ und von $L/\mathbb{Q}$!

Lösung: Beide Körper sind isomorph zu $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, und dieser Körper hat Grad zwei über $\mathbb{Q}$. Die Automorphismengruppe kann daher höchstens zwei Elemente haben. Eines ist die Identität, das andere der Automorphismus der $\sqrt{-3}$ auf $-\sqrt{-3}$ abbildet.

Aufgabe 2: *(3 Punkte)*

K/k sei eine Körpererweiterung mit endlichem Grad $d = [K : k]$. Zeigen Sie, daß jedes Element $x \in K$ Nullstelle eines Polynoms $f \in k[X]$ vom Grad höchstens d ist!
(Hinweis: Betrachten Sie die Menge aller x-Potenzen!

Lösung: Als k-Vektorraum hat K die Dimension d, so daß die $d{+}1$ Elemente $1, x, x^2, \ldots, x^d$ linear abhängig sein müssen. Es gibt somit Elemente $a_i \in k$, die nicht alle verschwinden und für die $a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$ verschwindet. Somit ist x Nullstelle eines Polynoms vom Grad höchstens d.

Aufgabe 3: *(11 Punkte)*

a) Bestimmen Sie den Grad des Zerfällungskörpers K von X^4-4 über $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$ und finden Sie komplexe Zahlen, die eine $\mathbb{Q}$-Vektorraumbasis von K bilden!

Lösung: $X^4-4 = (X^2+2)(X^2-2) = \left(X+\sqrt{-2}\right)\left(X-\sqrt{-2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)\left(X-\sqrt{2}\right)$. Der Zerfällungskörper enthält somit die komplexen Zahlen $\sqrt{2}, \sqrt{-2} = i\sqrt{2}$ und damit auch i. Er kann konstruiert werden, indem wir zunächst den Zerfällungskörper L des Polynoms X^2-2 über Q betrachten, der als quadratische Erweiterung natürlich den Grad zwei hat, und dann den von X^2+2 über L; auch hier ist $[K:L]=2$. Insgesamt ist somit $[K:\mathbb{Q}] = 2\cdot 2 = 4$, und damit bilden die über $\mathbb{Q}$ linear unabhängigen komplexen Zahlen $1, i, \sqrt{2}$ und $\sqrt{-2}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $K/\mathbb{Q}$.

b) Ist $K \cong \mathbb{Q}[X]/(X^4-4)$?

Lösung: Natürlich nicht, denn $X^4-4 = (X^2+2)(X^2-2)$ ist in $\mathbb{Q}[X]$ reduzibel, so daß $\mathbb{Q}[X]/(X^4-4)$ Nullteiler hat: Für die Restklasse x von X ist $(x^2-2)(x^2+2)=0$, obwohl keiner der beiden Faktoren verschwindet.

c) Zeigen Sie, daß die komplexe Konjugation einen Automorphismus von $K/\mathbb{Q}$ definiert, und bestimmen Sie dessen Fixkörper!

Lösung: Die komplexe Konjugation ist ein Automorphismus von $\mathbb{C}$, der $\mathbb{R}$ und damit erst recht $\mathbb{Q}$ punktweise festläßt. Der Teilkörper $K < \mathbb{C}$ wird auf sich selbst abgebildet, denn $K = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}i \oplus \mathbb{Q}\sqrt{2} \oplus \mathbb{Q}\sqrt{-2}$, und das Element $a + ib + c\sqrt{2} + d\sqrt{-2}$ geht auf $a - ib + c\sqrt{2} - d\sqrt{-2}$. Daran sieht man, daß $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}\sqrt{2}$ der Fixkörper ist.

d) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper k mit $\mathbb{Q} < k < K$ und finden Sie zu jedem einen Automorphismus von $K/\mathbb{Q}$, dessen Fixkörper er ist!

Lösung: Wir kennen bereits $L = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ als Fixkörper der komplexen Konjugation. Auch $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}i$ ist ein solcher Zwischenkörper; er ist der Fixkörper des Automorphismus, der $\sqrt{2}$ auf $-\sqrt{2}$ abbildet. Ein dritter Zwischenkörper ist $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-2}\right)$ als Fixkörper des Automorphismus, der i auf $-i$ und $\sqrt{2}$ auf $-\sqrt{2}$ abbildet. Da die Ordnung der Automorphismengruppe höchstens gleich dem Grad der Körpererweiterung ist, gibt es nicht mehr als drei von der Identität verschiedene Automorphismen und damit auch nicht mehr Zwischenkörper.

e) Was ist $\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$?

Lösung: Wir kennen bereits vier Automorphismen: Die Identität, die komplexe Konjugation, den Automorphismus, der $\sqrt{2}$ auf $-\sqrt{2}$ abbildet und i festläßt, sowie das Produkt der beiden letzten Automorphismen. Da $[K:\mathbb{Q}] = 4$ ist, sind das alle. Sie bilden eine KLEINsche Vierergruppe.

f) Zeigen Sie, daß $\sqrt{2}+i$ in K liegt und bestimmen den Teilkörper $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}+i\right)$!

Lösung: Als Summe zweier Elemente der in *a)* gefundenen Basis liegt $x = \sqrt{2}+i$ in K. Das Quadrat $x^2 = 1 + 2i\sqrt{2}$ liegt nicht in $\mathbb{Q}$, und auch durch Addition eines rationalen Vielfachen von x kann keine rationale Zahl erreicht werden. Daher hat $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}+i\right)$ einen größeren Grad als zwei über $\mathbb{Q}$ und muß daher gleich K sein.

g) Bestimmen Sie das Bild von $\sqrt{2}+i$ unter den Automorphismen von $K/\mathbb{Q}$ und finden Sie ein irreduzibles Polynom $g \in \mathbb{Q}[X]$, das diese Zahlen als Nullstellen hat!

Lösung: Die Identität läßt das Element natürlich fest, die komplexe Konjugation bildet es auf $\sqrt{2}-i$ ab, der Automorphismus $\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$ auf $-\sqrt{2}+i$, und das Produkt der beiden auf $-\sqrt{2}-i$. Ein Polynom aus $\mathbb{Q}[X]$, das $\sqrt{2}+i$ als Nullstelle hat, muß auch alle diese Bilder als Nullstellen haben. Das Polynom das alle vier als Nullstellen hat, ist invariant unter der Automorphismengruppe und hat daher Koeffizienten aus dem Fixkörper $\mathbb{Q}$. Es ist

$$\begin{aligned}(X-\sqrt{2}-i)(X-\sqrt{2}+i)(X+\sqrt{2}-i)(X+\sqrt{2}+i) &= \Big((X^2-\sqrt{2})^2+1\Big)\Big((X^2+\sqrt{2})^2+1\Big)\\ &= (X^2+3-2\sqrt{2}X)(X^2+3+2\sqrt{2}X) = (X^2+3)^2-8X^2 = X^4-2X^2+9\end{aligned}$$

Es ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, da jede Nullstelle eines Faktors auch alle deren Bilder unter $\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$ als Nullstellen haben muß.

h) Ist $K \cong \mathbb{Q}[X]/(g)$?

Lösung: Ja, denn g ist irreduzibel, und K ist der Zerfällungskörper von g über $\mathbb{Q}$.