Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

18. November 2019

8. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie über $\mathbb{Q}$ den Zerfällungskörper K des Polynoms $f = X^3 - 1$ sowie den Zerfällungskörper L von $g = X^2 + 3$, und geben Sie jeweils eine $\mathbb{Q}$-Vektorraumbasis dieses Körpers an!

b) Zeigen Sie, daß K und L isomorph sind!

c) Gibt es auch einen Isomorphismus $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 1) \to \mathbb{Q}[X]/(X^2 + 3)$?

d) Bestimmen Sie die Automorphismengruppen von $K/\mathbb{Q}$ und von $L/\mathbb{Q}$!

Aufgabe 2: *(3 Punkte)*

K/k sei eine Körpererweiterung mit endlichem Grad $d = [K : k]$. Zeigen Sie, daß jedes Element $x \in K$ Nullstelle eines Polynoms $f \in k[X]$ vom Grad höchstens d ist!
(Hinweis: Betrachten Sie die Menge aller x-Potenzen!

Aufgabe 3: *(11 Punkte)*

a) Bestimmen Sie den Grad des Zerfällungskörpers K von $X^4 - 4$ über $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$, und finden Sie komplexe Zahlen, die eine $\mathbb{Q}$-Vektorraumbasis von K bilden!

b) Ist $K \cong \mathbb{Q}[X]/(X^4 - 4)$?

c) Zeigen Sie, daß die komplexe Konjugation einen Automorphismus von $K/\mathbb{Q}$ definiert, und bestimmen Sie dessen Fixkörper!

d) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper k mit $\mathbb{Q} < k < K$, und finden Sie zu jedem einen Automorphismus von $K/\mathbb{Q}$, dessen Fixkörper er ist!

e) Was ist $\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$?

f) Zeigen Sie, daß $\sqrt{2} + i$ in K liegt, und bestimmen Sie den Teilkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + i)$!

g) Bestimmen Sie die Bilder von $\sqrt{2} + i$ unter den Automorphismen von $K/\mathbb{Q}$, und finden Sie ein irreduzibles Polynom $g \in \mathbb{Q}[X]$, das alle diese Zahlen als Nullstellen hat!

h) Ist $K \cong \mathbb{Q}[X]/(g)$?