Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

21. Oktober 2020

4. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Finden Sie mit dem Sieb des Eratosthenes und eventuell zusätzlichen Divisionen ohne Computerhilfe alle Primzahlen p mit $1320 \leq p \leq 1340$!

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) Ein Mathematiklehrer, der immer gerne Dreiecksgeometrie unterrichtet hat, möchte zur Feier seines Geburtstags die Kerzen (eine für jedes Lebensjahr) so auf ausgewählten Geburtstagstorten verteilen, daß sie auf jeder Torte in Form eines Dreiecks einer festen Kantenlänge n angeordnet sind. Ein solches Dreieck beginnt mit einer Kerze als oberer Ecke, darunter kommt eine Reihe aus zwei Kerzen, dann eine aus drei, und so weiter, bis zur unteren Kante aus n Kerzen. Leider geht das für kein n auf: Bei $n = 5$ etwa muß er die übrig gebliebenen fünf Kerzen auf der letzten Torte in Form eines Zweierquadrats mit zusätzlichem Mittelpunkt anordnen, und bei $n = 7$ bleiben noch Kerzen für ein 3×3 Quadrat auf der letzten Torte übrig. Wie alt wird er?

b) Wie viele Torten braucht er bei $n = 5$ und bei $n = 7$ jeweils, um alle Kerzen unterzubringen?

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*
Zeigen Sie ohne Verwendung des kleinen Satzes von Fermat, daß für jede Primzahl p gilt

$$(a_1 + \cdots + a_r)^p \equiv a_1^p + \cdots + a_r^p \quad \text{für alle } a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}\,!$$

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*
$p = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ ist keine Primzahl. Zeigen Sie, daß trotzdem $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$ gilt für alle zu p teilerfremden ganzen Zahlen a !
Hinweis: Betrachten Sie a^{p-1} modulo 3, 11 und 17 !

Aufgabe 5: *(3 Punkte)*
Finden sie eine natürliche Zahl d mit der Eigenschaft, daß die Abbildung

$$\begin{cases} \{0, 1, \ldots 100\} \to \{0, 1, \ldots, 100\} \\ \qquad x \mapsto x^d \bmod 101 \end{cases} \quad \text{invers ist zu} \quad \begin{cases} \{0, 1, \ldots 100\} \to \{0, 1, \ldots, 100\} \\ \qquad x \mapsto x^9 \bmod 101 \end{cases} \;!$$

Abgabe bis zum Dienstag, dem 27. Oktober 2020, um 15.20 Uhr