Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

8. November 2019

9. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

a) Für ein Polynom $f = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in k[X]$ über einem beliebigen Körper k bezeichnen wir

$$f' = d a_d X^{d-1} + (d-1) a_{d-1} X^{d-2} + \cdots + 2a_2 X + a_1$$

als die (formale) Ableitung von f. Zeigen Sie, ausgehend von dieser Definition, daß für zwei Polynome $f, g \in k[X]$ gilt: $(f \pm g)' = f' \pm g'$ und $(fg)' = fg' + f'g$!

b) Folgern Sie, daß eine mehrfache Nullstelle eines Polynoms f auch eine Nullstelle von f' ist!

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

G sei eine Gruppe, und $\chi_1, \ldots, \chi_r$ seien paarweise verschiedene Gruppenhomomorphismen von G in die multiplikative Gruppe $k^\times$ eines Körpers. Zeigen Sie, daß die χ_i linear unabhängig sind, d.h. falls $a_1\chi_1(g) + \cdots + a_r\chi_r(g) = 0$ für alle $g \in G$ und irgendwelche $a_i \in k$, müssen alle a_i verschwinden. *(Hinweis: Benutzen Sie die Methode mit der in der Vorlesung ein ähnliches Resultat für Monomorphismen von Körpern bewiesen wurde!)*

Aufgabe 3: *(12 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^4 - 2$ ist!

b) Finden Sie eine Basis von K als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. *(Hinweis: Es dürfte am einfachsten sein, wenn Sie K über die Folge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset K$ schrittweise aufbauen.)*

c) $\sigma\colon K \to K$ sei der Automorphismus, der i festläßt und $\sqrt[4]{2}$ auf $i\sqrt[4]{2}$ abbildet, und τ sei die komplexe Konjugation. Bestimmen Sie die Fixkörper

$$\{x \in K \mid \sigma(x) = x\}, \qquad \{x \in K \mid \tau(x) = x\} \quad \text{und} \quad \{x \in K \mid \sigma(x) = x \text{ und } \tau(x) = x\}!$$

d) Welche Ordnungen haben σ, τ und die von σ, τ erzeugte Automorphismengruppe?

e) Bestimmen Sie die Gruppe aller Automorphismen $K \to K$!

f) Zeigen Sie, daß $K/\mathbb{Q}$ eine Galoissche Erweiterung ist!

g) Zeigen Sie, daß $\operatorname{Aut}(K/\mathbb{Q})$ isomorph ist zur Diedergruppe D_4!

h) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \le L \le K$ und die zugehörigen Untergruppen der Galois-Gruppe!