Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

30. Oktober 2019

8. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie über $\mathbb{Q}$ Zerfällungskörper für die beiden Polynome $f = X^3 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und $g = X^2 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$, und zeigen Sie, daß diese isomorph sind!

b) Gibt es einen Ringisomorphismus $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 1) \to \mathbb{Q}[X]/(X^2 + 3)$?

c) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + X + 1) \cong \mathbb{Q}[X]/(X^2 + 3)$ ist!

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) $K \subset \mathbb{C}$ sei ein Körper, der sowohl i als auch $\sqrt{2}$ enthält. Berechnen Sie das Polynom

$$f = (X - i - \sqrt{2})(X - i + \sqrt{2})(X + i - \sqrt{2})(X + i + \sqrt{2})$$

und überzeugen Sie sich, daß $f \in \mathbb{Q}[X]$!

b) Was ist der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

K/k sei eine Körpererweiterung mit endlichem Grad $d = [K : k]$. Zeigen Sie, daß jedes Element $x \in K$ Nullstelle eines Polynoms $f \in k[X]$ vom Grad höchstens d ist!
(Hinweis: Betrachten Sie die Menge aller x-Potenzen!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) $\varphi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sei ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, daß $\varphi(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$!

b) Ist auch jeder Ringhomomorphismus $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleich der Identität? *(Hinweis: Eine reelle Zahl ist genau dann größer oder gleich Null, wenn sie ein Quadrat ist.)*

c) Finden Sie einen Automorphismus von additiven Gruppen $\varphi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, der nicht gleich der Identität ist!

d) Gibt es auch einen nichttrivialen Automorphismus $\varphi\colon \mathbb{Q}^\times \to \mathbb{Q}^\times$ der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{Q}$?