Wolfgang K. Seiler — B6, B4.18
Tel. 2515

26. Oktober 2019

7. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Geben Sie die Einheitengruppen der folgenden Ringe explizit an und entscheiden Sie, welche davon zyklisch sind:

a) $\mathbb{Z}$ *b)* $\{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ *c)* $\mathbb{Z}/30$ *d)* $\mathbb{Z}[X, Y]$ *e)* $\mathbb{R}[X, Y, Z]$

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
k sei ein Körper, $R = k[X]$ der Polynomring in einer Veränderlichen über k, und I sei das von $f = X^2 + 2X + 3$ erzeugte Hauptideal in R.

a) Zeigen Sie, daß jede Nebenklasse $\overline{g} = g + I \in R/I$ genau ein Polynom der Form $aX + b$ mit $a, b \in k$ enthält!

b) Für die Nebenklassen $\overline{g}_1$ und $\overline{g}_2$ seien dies die Polynome $a_1X + b_1$ und $a_2X + b_2$. Finden Sie die entsprechenden Polynome für die Nebenklassen $\overline{g}_1 + \overline{g}_2$ und $\overline{g}_1 \cdot \overline{g}_2$!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \to \left(\mathbb{Z}/16\right)^\times \\ \qquad (n, m) \mapsto 3^n \cdot 7^m \end{cases}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist! *(Hinweis: Betrachten Sie die von 3 und 7 erzeugten Untergruppen von $\left(\mathbb{Z}/16\right)^\times$.)*

b) Folgern Sie, daß für alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, 16) = 1$ gilt: $a^4 \equiv 1 \bmod 16$.

d) Gilt auch, daß $a^5 \equiv a \bmod 16$ für *alle* $a \in \mathbb{Z}$?

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Finden Sie jeweils eine primitive Wurzel modulo fünf und eine modulo sieben!

b) Zeigen Sie, daß $\left(\mathbb{Z}/35\right)^\times \cong \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/6$ ist!

c) Ist $\left(\mathbb{Z}/35\right)^\times$ zyklisch?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 31. Oktober 2019, um 15.30 Uhr