Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

18. Oktober 2019

6. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(3 Punkte)*

a) m sei eine ganze Zahl. Zeigen Sie, daß der Ring $\mathbb{Z}/(m)$ genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn $m = p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist!

b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ dann sogar ein Körper ist!

c) Berechnen Sie im Körper $\mathbb{F}_{103}$ das multiplikative Inverse von zehn!

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*

p sei eine Primzahl, und für jede ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ bezeichne $\overline{a}$ die Restklasse von a modulo p in $\mathbb{F}_p$.

a) Zeigen Sie: Die Abbildung, die jedem $f = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ das Polynom $\overline{f} = \overline{a_n}\,X^n + \cdots + \overline{a_1}\,X + \overline{a_0} \in \mathbb{F}_p[X]$ zuordnet, ist ein Ringhomomorphismus!

b) Bestimmen Sie Kern und Bild dieses Homomorphismus!

c) Ein Polynom in X heißt *normiert,* wenn der Koeffizient der höchsten vorkommenden X-Potenz gleich eins ist. Zeigen Sie: Ist $f \in \mathbb{Z}[X]$ normiert und $\overline{f}$ irreduzibel für irgendeine Primzahl p, so ist auch f irreduzibel!

d) Folgt umgekehrt aus der Irreduzibilität von f die von $\overline{f}$?

e) Gilt die Behauptung in *c)* auch, wenn f nicht normiert, sondern nur primitiv ist?

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) $f = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ sei ein primitives Polynom und p sei eine Primzahl, die alle a_i außer a_n teilt und deren Quadrat kein Teiler von a_0 ist. Zeigen Sie, daß f irreduzibel ist!
Hinweis: Sie können ähnlich vorgehen wie beim Beweis, daß das Produkt zweier primitiver Polynome wieder primitiv ist.

b) Zeigen Sie: Ein Polynom $f = f(X) \in R[X]$ über einem Integritätsbereich R ist genau dann irreduzibel, wenn das Polynom $f(X + 1)$ irreduzibel ist.

c) Schreiben Sie $f = \dfrac{X^p - 1}{X - 1}$ als Polynom, und folgern Sie aus *a)* und *b),* daß dieses irreduzibel ist!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) R sei ein Hauptidealring, und für $a, b \in R$ sei (c) das kleinste Ideal, das a und b enthält. Zeigen Sie, daß c ein größter gemeinsamer Teiler von a und b ist!

b) Kann es in einem Hauptidealring eine unendliche Folge von Idealen I_ν geben derart, daß $I_{\nu+1}$ für jedes ν echt in I_ν enthalten ist?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 24. Oktober 2019, um 15.30 Uhr