Wolfgang K. Seiler B6, B4.18
Tel. 2515

11. Oktober 2019

5. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

U sei die kleinste Untergruppe der Diedergruppe D_4, die die beiden Spiegelungen an den Diagonalen des Quadrats enthält.

a) Welche Elemente enthält U?

b) Ist U abelsch?

c) Ist U ein Normalteiler?

d) Zeigen Sie, daß U isomorph ist zu einer der aus der Vorlesung bekannten Gruppen!

e) Finden Sie die kleinste natürliche Zahl n, für die U in die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ eingebettet werden kann, und geben Sie eine Einbettung $U \to \mathfrak{S}_n$ explizit an!

Aufgabe 2: *(3 Punkte)*

Eine Gruppe G heißt *einfach*, wenn sie außer sich selbst und der Untergruppe, die nur aus dem Neutralelement besteht, keine Normalteiler hat. Zeigen Sie: $\mathbb{Z}/n$ ist genau dann einfach, wenn n eine Primzahl ist.

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

G sei eine Gruppe und $U \le G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie:

a) Für jedes $g \in G$ ist $U^g \underset{\text{def}}{=} g^{-1}Ug$ eine Untergruppe von G.

b) Der Durchschnitt aller Untergruppen U^g ist ein Normalteiler von G.

c) $H = \{g \in G \mid U^g = U\}$ ist eine Untergruppe von G.

d) U ist ein Normalteiler von H.

e) Die Anzahl verschiedener Untergruppen U^g ist gleich dem Index von H.

f) U sei eine maximale Untergruppe von G, d.h. außer G selbst gibt es keine Untergruppe von G, die U echt enthält. Falls es ein $g \notin U$ gibt, für das $g^{-1}Ug = U$ ist, ist U ein Normalteiler von G.

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, die jedem Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ den Funktionswert $f(1)$ zuordnet, ein Homomorphismus ist, und bestimmen Sie Kern und Bild von φ!

b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\psi: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$, die jedem Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ den Funktionswert $f(i)$ zuordnet, ein Homomorphismus ist, und bestimmen Sie Kern und Bild von ψ!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 17. Oktober 2019, um 15.30 Uhr