Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

2. Oktober 2019

4. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(3 Punkte)*
G sei eine abelsche Gruppe und $g_1, \dots, g_n \in G$. Zeigen Sie: Für jede Permutation

$$\pi\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \qquad \text{ist} \qquad \prod_{i=1}^{n} g_i = \prod_{i=1}^{n} g_{\pi(i)}\,.$$

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*
$G = \mathfrak{S}_3$ sei die Menge aller Permutationen $\pi\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$.

a) Bestimmen für die Transposition $\tau = (1,2)$ die Rechts- und die Linksnebenklassen, und bestimmen Sie für jedes Element von $\mathfrak{S}_3$ sein Bild unter der Konjugation mit τ!

b) Bestimmen für den Dreierzyklus $\pi = (1,2,3)$ die Rechts- und die Linksnebenklassen, und bestimmen Sie für jedes Element von $\mathfrak{S}_3$ sein Bild unter der Konjugation mit π!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*
Zeigen Sie:

a) Eine Teilmenge $U \subseteq G$ einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe, wenn sie nicht leer ist und wenn für alle $g, h \in U$ auch gh^{-1} in U liegt.

b) Eine endliche Teilmenge $U \subseteq G$ einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe, wenn sie nicht leer ist und wenn $UU \subseteq U$ ist.

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*
Zeigen Sie:

a) Eine Gruppe G ist genau dann abelsch, wenn für jedes Element $g \in G$ die Konjugationsabbildung $x \mapsto x^g$ gleich der identischen Abbildung ist.

b) G ist genau dann abelsch, wenn für je zwei Elemente a, b von G deren Kommutator $[a,b] \underset{\text{def}}{=} aba^{-1}b^{-1}$ gleich dem Neutralelement 1 ist.

c) Eine Gruppe, in der $g^2 = 1$ für alle $g \in G$, ist abelsch.

d) Jede endliche Gruppe mit gerader Ordnung enthält mindestens ein Element $g \neq 1$ mit $g^2 = 1$. *Hinweis: Zeigen Sie, daß* $\{g \in G \mid g \neq g^{-1}\}$ *eine gerade Elementanzahl hat.*

Aufgabe 5: *(4 Punkte)*

a) G sei eine Gruppe, und $\operatorname{Aut} G$ sei die Menge aller Automorphismen $\varphi\colon G \to G$. Zeigen Sie, daß G bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe ist!

b) Zeigen Sie, daß die inneren Automorphismen eine Untergruppe von $\operatorname{Aut} G$ bilden!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 10. Oktober 2019, um 15.30 Uhr