Kapitel 1
Klassische Lösungsformeln

Wir beginnen mit dem klassischen Grundproblem der Algebra, dem Lösen von Polynomgleichungen in einer Variablen. Über Zahlbereiche wollen wir uns dabei noch keine großen Gedanken machen; wer will, kann von den reellen Zahlen für die Koeffizienten ausgehen und von den komplexen für die Lösungen.

§1: Lineare Gleichungen

Keinerlei Probleme gibt es mit der linearen Gleichung $ax = b$: Falls a nicht verschwindet, hat sie die eine Lösung $x = b/a$; im Falle $a = 0$ ist sie für $b \neq 0$ unlösbar und stellt für $b = 0$ keine Bedingung an x.

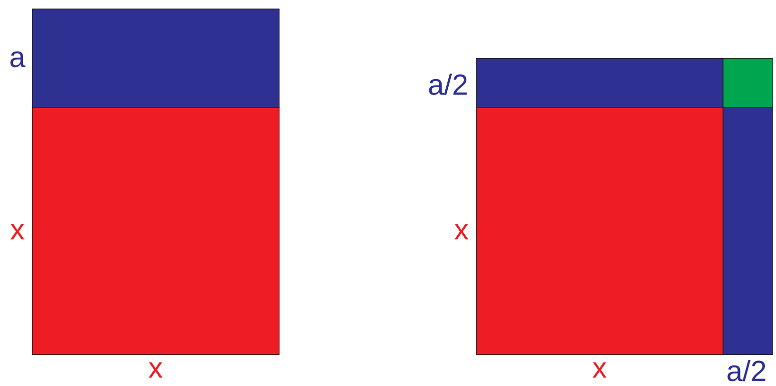
§2: Lösung quadratischer Gleichungen

Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungen waren in allen frühen Hochkulturen bekannt; die ältesten erhaltenen Hinweise deuten darauf hin, daß die Babylonier schon vor rund vier Jahrtausenden damit vertraut waren.

Der Ansatz zur Lösung der Gleichung $x^2 + ax = b$ läßt sich am einfachsten geometrisch verstehen: Wir suchen nach einem Quadrat mit unbekannter Seitenlänge x derart, daß die Fläche des Quadrats zusammen mit der des Rechtecks mit Seiten x und a gleich b ist.

Die linke unter den beiden folgenden Zeichnungen zeigt dieses Quadrat und darüber das Rechteck; auf der rechten Seite ist die Hälfte des Rechtecks neben das Quadrat gewandert, so daß abgesehen von dem kleinen Quadrat rechts oben nun ein Quadrat mit Seitenlänge $x + \frac{a}{2}$ entstanden ist. Die Größe des kleinen Quadrats ist bekannt: Seine Seitenlänge ist $\frac{a}{2}$. Wir suchen somit eine Zahl x derart, daß das Quadrat mit Seitenlänge $x+\frac{a}{2}$ die Fläche $b+\frac{a^2}{4}$ hat; das Problem ist also zurückgeführt auf das Ziehen einer Quadratwurzel:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}\,.$$



(Eine ähnliche Zeichnung befindet sich übrigens auch im Buch von AL-CHWARIZMI; er teilt das Rechteck mit Seiten a und x allerdings auf in vier Rechtecke mit Seiten $a/4$ und x und setzt diese an die vier Seiten des Quadrats. Das gibt eine etwas schönere Zeichnung, dafür muß er vier Quadrate mit Seitenlänge $a/4$ hinzufügen, um auf ein Quadrat mit Seitenlänge $x + a/2$ zu kommen.)

Wie die Babylonier auf diese Lösungsformel kamen, ist nicht bekannt; in den überlieferten Schriften wird nur der fertige Lösungsweg anhand von Beispielen präsentiert. Sie wußten aber auf jeden Fall, daß die Summe der Lösungen der Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ gleich a ist und ihr Produkt gleich b – zum Beweis in einem allgemeineren Zusammenhang sei auf §6 verwiesen. Das Löseg der Gleichung $x^2 - ax + b$ ist also äquivalent dazu, zwei Zahlen x_1 und x_2 zu finden mit

$$x_1 + x_2 = a \quad \text{und} \quad x_1x_2 = b\,.$$

Um diese zu finden, machen wir den Ansatz

$$x_{1/2} = \frac{a}{2} \pm u$$

mit einer neuen Unbekannten u; damit ist die erste Gleichung automatisch erfüllt. Für die zweite erhalten wir nach der den Babyloniern bekannten dritten binomischen Formel

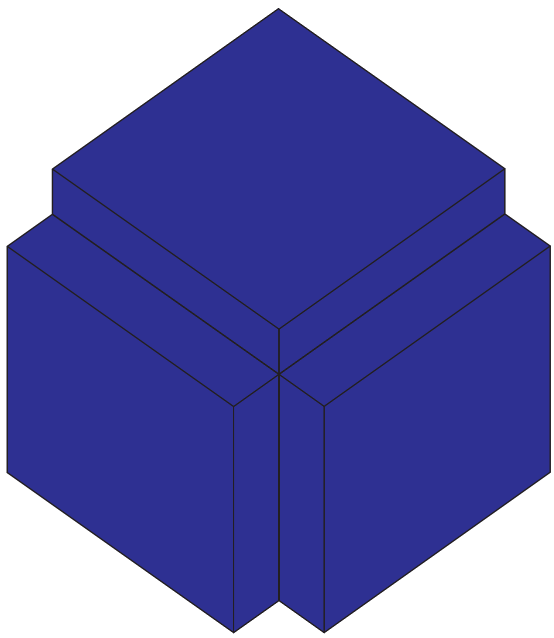
$$b = x_1 x_2 = \left(\frac{a}{2} + u\right)\left(\frac{a}{2} - u\right) = \frac{a^2}{4} - u^2 , \quad \text{also} \quad u = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} .$$

Somit ist $x_{1/2} = \dfrac{a}{2} \pm \sqrt{\dfrac{a^2}{4} - b}$.

§ 3: Kubische Gleichungen

Während die Lösungstheorie quadratischer Gleichungen seit mindestens vier Jahrtausenden bekannt ist, stammt der erste Ansatz zur Lösung allgemeiner kubischer Gleichungen aus dem Jahr 1515, ist also gerade erst ein halbes Jahrtausend alt.

Wenn wir versuchen, für die Gleichungen $x^3 + ax^2 = b$ eine ähnlich Strategie zu finden wie im Fall der Gleichung $x^2 + ax = b$, müssen wir ins Dreidimensionale gehen und auf den Würfel mit Kantenlänge x eine quadratische Säule mit Basisquadrat der Seitenlänge x und Höhe a stellen. Um sie so zu verteilen, daß wir möglichst nahe an einen neuen Würfel kommen, müssen wir jeweils ein Drittel davon auf drei der Seitenflächen des Würfels platzieren:



Leider fehlt hier nun nicht nur ein Würfel der Kantenlänge $\frac{a}{3}$, sondern auch noch drei quadratische Säulen der Höhe x auf Grundflächen mit Seitenlänge $\frac{a}{3}$. Wir können das Volumen des Würfels mit Seitenlänge $x + \frac{a}{3}$ also nicht einfach durch die bekannten Größen a, b ausdrücken, sondern haben auch noch einen Term mit der Unbekannten x.

Trotzdem ist diese Idee nützlich, sogar für Gleichungen höheren Grades. Die allgemeine Gleichung n-ten Grades hat die Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0\,,$$

wobei wir natürlich voraussetzen, daß a_n nicht verschwindet. Falls wir über einem Körper wie $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ arbeiten, können wir durch a_n dividieren und erhalten die neue Gleichung

$$x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0$$

mit höchstem Koeffizienten eins.

Geometrisch betrachtet wollen wir einen n-dimensionalen Hyperwürfel bekommen, dessen Seitenlänge $x + \frac{c_{n-1}}{n}$ sein sollte; rechnerisch bedeutet dies, daß wir die neue Variable $y = x + \frac{c_{n-1}}{n}$ betrachten und überall in der Gleichung x durch $y - \frac{c_{n-1}}{n}$ ersetzen:

$$\begin{aligned}
&x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_0 \\
&= \left(y - \frac{c_{n-1}}{n}\right)^n + c_{n-1}\left(y - \frac{c_{n-1}}{n}\right)^{n-2} + \cdots + c_1\left(y - \frac{c_{n-1}}{n}\right) + c_0 \\
&= \left(y^n - c_{n-1} y^{n-1} + n c_{n-1}^2 y^{n-2} + \cdots\right) \\
&\quad + c_{n-1}\left(y^{n-1} - \frac{(n-1)c_{n-1}}{n} y^{n-2} + \cdots\right) \\
&\quad + c_{n-2}\left(y^{n-2} - \frac{(n-2)c_{n-1}}{n} y^{n-3} + \cdots\right) \\
&\quad + \cdots \\
&= y^n + \left(n c_{n-1}^2 - \frac{(n-1)c_{n-1}^2}{n} + c_{n-2}\right) y_{n-2} + \cdots\ .
\end{aligned}$$

Wir kommen also auf eine Gleichung n-ten Grades in y, die keinen Term mit y^{n-1} hat.

Im Falle $n = 2$ hat diese Gleichung die Form $y^2 + p$, wir können ihre Nullstellen also einfach durch Wurzelziehen ermitteln. Für $n > 2$ haben wir immerhin einen Term weniger als in der allgemeinen Gleichung n-ten Grades und müssen sehen, ob uns das bei der Lösung helfen kann.

Im Falle der kubischen Gleichungen reicht es also, die spezielle Gleichung

$$y^3 + py + q = 0$$

explizit zu lösen. Auch wenn die Griechen geometrische Konstruktionen (jenseits von Zirkel und Lineal) kannten, mit denen sie Lösungen kubischer Gleichungen konstruieren konnten, sollte es noch bis ins 16. Jahrhundert dauern, bevor eine explizite Lösungsformel gefunden war – ein Zeichen dafür, daß der Lösungsansatz nicht gerade offensichtlich ist.

Der Trick, der schließlich zum Erfolg führte, ist folgender: Wir schreiben y als Summe zweier neuer Zahlen u und v und machen dadurch das Problem auf den ersten Blick nur schwieriger. Andererseits ist diese Summendarstellung natürlich alles andere als eindeutig; wir können daher hoffen, daß es auch dann noch Lösungen gibt, wenn wir an u und v zusätzliche Forderungen stellen und dadurch das Problem vielleicht vereinfachen.

Einsetzen von $y = u + v$ führt auf die Bedingung

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0\,.$$

Dies können wir auch anders zusammenfassen als

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u+v) = 0\,,$$

und natürlich verschwindet diese Summe insbesondere dann, wenn beide Summanden einzeln verschwinden. Falls es uns also gelingt, zwei Zahlen u, v zu finden mit

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{und} \quad 3uv = -p\,,$$

haben wir eine Lösung gefunden.

Zwei solche Zahlen u, v erfüllen erst recht die schwächere Bedingung

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{und} \quad u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27}\,,$$

wir kennen also die Summe und das Produkt ihrer dritten Potenzen. Damit kennen wir aber auch u^3 und v^3:

Haben zwei Zahlen h, k das Produkt r und die Summe s, so sind h und k die beiden Nullstellen der Gleichung

$$(z-h)(z-k) = z^2 - (h+k)z + hk = z^2 - sz + r = 0\ ;$$

falls wir r und s kennen, erhalten wir h und k also einfach als Lösungen einer quadratischen Gleichung:

$$h = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - r} \quad \text{und} \quad k = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - r}$$

oder umgekehrt.

In unserem Fall ist daher

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$
$$\text{und} \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\ ,$$

wobei es auf die Reihenfolge natürlich nicht ankommt.

Somit kennen wir u^3 und v^3. Für u und v selbst gibt es dann jeweils drei Möglichkeiten, allerdings führen nicht alle neun Kombinationen dieser Möglichkeiten zu Lösungen, denn für eine Lösung muß ja die Bedingung $3uv = -p$ erfüllt sein, nicht nur $u^3 \cdot v^3 = -\frac{1}{27}p^3$.

Dies läßt sich am besten dadurch gewährleisten, daß wir für u *irgendeine* der drei Kubikwurzeln von u^3 nehmen und dann $v = -p/3u$ setzen. Die drei Lösungen der kubischen Gleichung $y^3 + py + q = 0$ sind also

$$y = u - \frac{p}{3u} \quad \text{mit} \quad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\ ,$$

wobei für u nacheinander jede der drei Kubikwurzeln eingesetzt werden muß. (Es spielt keine Rolle, welche der beiden Quadratwurzeln wir nehmen, denn ersetzen wir die eine durch die andere, vertauschen wir dadurch einfach u und v.)

Da selbst von den drei Kubikwurzeln einer reellen Zahl nur eine reell ist, müssen wir zur Bestimmung aller drei Lösungen einer kubischen Gleichung *immer* auch mit komplexen Zahlen rechnen, selbst wenn sowohl Koeffizienten als auch Lösungen allesamt reell sind.

Die erste Lösung einer kubischen Gleichung geht wohl aus SCIPIONE DEL FERRO (1465–1526) zurück, der von 1496 bis zu seinem Tod an der Universität Bologna lehrte. 1515 fand er eine Methode, um die Nullstellen von $x^3 + px = q$ für *positive* Werte von p und q zu bestimmen (Negative Zahlen waren damals in Europa noch nicht im Gebrauch). Er veröffentlichte diese jedoch nie, so daß NICCOLO FONTANA (1499–1557, oberes Bild), genannt TARTAGLIA (der Stotterer), dieselbe Methode 1535 noch einmal entdeckte und gleichzeitig auch noch eine Modifikation, um einen leicht verschiedenen Typ kubischer Gleichungen zu lösen. TARTAGLIA war mathematischer Autodidakt, war aber schnell als Fachmann anerkannt und konnte seinen Lebensunterhalt als Mathematiklehrer in Verona und Venedig verdienen.

Die Lösung allgemeiner kubischer Gleichungen geht auf den Mathematiker, Arzt und Naturforscher GIROLAMO CARDANO (1501–1576, unteres Bild) zurück, dem TARTAGLIA nach langem Drängen und unter dem Siegel der Verschwiegenheit seine Methode mitgeteilt hatte. LODOVICO FERRARI (1522–1565) kam 14-jährig als Diener zu CARDANO; als dieser merkte, daß FERRARI schreiben konnte, machte er ihn zu seinem Sekretär. 1540 fand FERRARI die Lösungsmethode für biquadratische Gleichungen; 1545 veröffentlichte CARDANO in seinem Buch *Ars magna* die Lösungsmethoden für kubische und biquadratische Gleichungen.

Betrachten wir dazu als einfaches Beispiel die Gleichung

$$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6\,;$$

sie hat nach Konstruktion die drei Lösungen $1, 2$ und 3.

Falls wir das nicht wüßten, würden wir als erstes durch die Substitution $y = x - 2$ den quadratischen Term eliminieren. Einsetzen von $x = y + 2$

liefert

$$\begin{aligned}&(y+2)^3-6(y+2)^2+11(y+2)-6\\ &=y^3+6y^2+12y+8-6y^2-24y-24+11y+22-6=y^3-y\,,\end{aligned}$$

wir müssen also zunächst die Gleichung $y^3 - y = 0$ lösen. Hierzu brauchen wir selbstverständlich keine Lösungstheorie kubischer Gleichungen: Ausklammern von y und die dritte binomische Formel zeigen sofort, daß

$$y^3-y=y(y^2-1)=y(y+1)(y-1)$$

genau an den Stellen $y = -1, 0, 1$ verschwindet, und da $x = y + 2$ ist, hat die Ausgangsgleichung die Lösungen $x = 1, 2, 3$.

Wenden wir trotzdem unsere Lösungsformel an: Bei dieser Gleichung ist $p = -1$ und $q = 0$, also

$$u=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{-1}{27}}}=\sqrt[6]{\frac{-1}{27}}=\sqrt{\frac{-1}{3}}$$

für die rein imaginäre Kubikwurzel. Das zugehörige v muß die Gleichung $uv = \frac{1}{3}$ erfüllen, also ist $v = -u$ und wir erhalten als erste Lösung $y = u + v = 0$.

Die beiden anderen Kubikwurzeln erhalten wir, indem wir die reelle Kubikwurzel mit einer der beiden komplexen dritten Einheitswurzeln multiplizieren, d.h. also mit

$$\rho=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,i}{2}\quad\text{und}\quad\overline{\rho}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\,i}{2}$$

Im ersten Fall ist

$$u=\sqrt{\frac{-1}{3}}\rho=\frac{\sqrt{3}}{3}i\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i$$

und

$$v=\frac{1}{3u}=\frac{-2}{3+\sqrt{3}\,i}=\frac{-2(3-\sqrt{3}\,i)}{3^2+(\sqrt{3})^2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\,;$$

wir erhalten somit die Lösung $y = u + v = -1$.

Die dritte Kubikwurzel

$$u = \sqrt{\frac{-1}{3}}\bar{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{3}i\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

schließlich führt auf

$$v = \frac{1}{3u} = \frac{2}{3 - \sqrt{3}\,i} = \frac{2(3 + \sqrt{3}\,i)}{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

und liefert so die Lösung $y = u + v = 1$.

Etwas komplizierter wird es bei der Gleichung

$$x^3 - 7x + 6 = 0\,.$$

Da sie keinen x^2-Term hat, können wir gleich $p = -7$ und $q = 6$ in die Formel einsetzen und erhalten

$$u = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{6^2}{4} - \frac{7^3}{27}}} = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{400}{4 \cdot 27}}} = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{3}\,i}\,.$$

Was nun? Wenn wir einen Ansatz der Form $u = r + is$ machen, kommen wir auf ein System von zwei kubischen Gleichungen in zwei Unbekannten, also ein schwierigeres Problem als unsere Ausgangsgleichung.

Eine Alternative ist die Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen: Jede komplexe Zahl z läßt sich darstellen in der Form

$$z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\,,$$

und

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}\left(\cos\tfrac{\varphi}{3} + i\sin\tfrac{\varphi}{3}\right)\,.$$

Leider gibt es keine einfache Formel, die Sinus und Kosinus von $\frac{\varphi}{3}$ durch $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ausdrückt. Aus den Additionstheoremen können wir uns natürlich leicht Formeln für $\cos 3\varphi$ verschaffen; wir erhalten

$$cos3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\,.$$

Um $x = \cos\frac{\varphi}{3}$ zu berechnen, müssen wir also die kubische Gleichung $4x^3 - 3x = \cos\varphi$ lösen, was uns wiederum auf die Berechnung einer Kubikwurzel führt *usw.*

Trotzdem ist die obige Darstellung der Lösung nicht völlig nutzlos: Sie gibt uns immerhin Formeln für den Real- und den Imaginärteil der Lösung, und diese Formeln können wir numerisch auswerten. Das Ergebnis im obigen Beispiel ist $1{,}000000001 + 11{,}154700538\,i$. Wie jedes numerische Ergebnis stimmt diese Zahl natürlich nur näherungsweise, und zumindest in diesem Fall ist die Hypothese, daß es sich beim Realteil um eine durch Rundungsfehler verfälschte Eins handeln kann, eine Überlegung wert. Falls dem so sein sollte, ist

$$\cos\left(-\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{10}{27}\sqrt{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{3}{7}}\,,$$

und daraus folgt dann über die Beziehung $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, daß

$$\sin\left(-\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{10}{27}\sqrt{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right)=\pm\sqrt{1-\frac{3}{7}}=\pm\sqrt{\frac{4}{7}}=\pm\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

und

$$u=1\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{7}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}i=1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

ist. Bislang war alles noch Spekulation; nun kommt die Probe:

$$\left(1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)^3=1\pm2\sqrt{3}\,i-4\mp\frac{8}{9}\sqrt{3}\,i=-3\pm\frac{10}{9}\sqrt{3}\,i\,,$$

also ist $u=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}i$. Das zugehörige v ist

$$v=\frac{7}{3u}=\frac{7}{3+2\sqrt{3}\,i}=\frac{7(3-2\sqrt{3}\,i)}{3^2+2^2\cdot3}=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}i\,.$$

Damit ist die erste Lösung $x=u+v=2$ gefunden. Die beiden anderen sind nun (etwas langwierige) Routine; als Ergebnis erhalten wir

$$u\rho+\frac{7}{3u\rho}=-3\quad\text{und}\quad u\overline{\rho}+\frac{7}{3u\overline{\rho}}=1\,.$$

Obwohl die drei Lösungen $1, 2$ und -3 unserer Gleichung allesamt ganzzahlig sind, konnten wir dies also durch bloßes Einsetzen in unsere Formel nicht erkennen und konnten insbesondere die Kubikwurzel nur durch Erraten und Nachprüfen in einer einfachen Form darstellen.

Wenn wir eine reelle Kubikwurzel finden können, ist die Situation auch nicht unbedingt viel besser. Betrachten wir etwa die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 + 9x + 13 = 0 \,.$$

Hier setzen wir $x = y + 1$ und erhalten die neue Gleichung

$$\begin{aligned}(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 9(y+1) + 13 \\ = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3(y^2 + 2y + 1) + 9y + 9 + 13 \\ = y^3 + 6y + 20 = 0\end{aligned}$$

mit $p = 6$ und $q = 20$. Damit ist $\frac{p}{3} = 2$ und $\frac{q}{2} = 10$, also

$$u = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{100 + 8}} = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}} = \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}}$$

Da 108 größer ist als $(-10)^2 = 100$, gibt es eine positive reelle Wurzel; wir rechnen zunächst mit dieser und erhalten als erste Lösung

$$y_1 = u - \frac{p}{3u} = \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}}} \,.$$

Damit haben wir im Prinzip eine Lösung gefunden. Wenn wir sie allerdings numerisch auswerten, erhalten wir -1,99999998, und damit drängt sich natürlich die Hypothese auf, daß dies gleich -2 sein könnte. Einsetzen von $y = -2$ in unsere kubische Gleichung zeigt in der Tat, daß

$$(-2)^3 + 6 \cdot (-2) + 20 = -8 - 12 + 20 = 0$$

ist. Aber warum ist

$$\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}}} = -2 \,,$$

und wie, vor allem, kann man das der linken Seite ansehen?

Wie die Erfahrung der Computeralgebra zeigt, kann es extrem schwierig sein, auch nur zu entscheiden, ob zwei Wurzelausdrücke gleich sind; direkte allgemeine Verfahren dazu gibt es nicht. Unsere Formel gibt uns daher zwar immer drei Wurzelausdrücke, die Lösungen der gegebenen Gleichung sind, aber diese können für Zahlen stehen, die sich auch sehr viel einfacher ausdrücken lassen.

Im vorliegenden Fall, wo die numerische Berechnung eine Vermutung nahelegt, können wir wieder versuchen, diese zu beweisen: Aus der vermuteten Gleichung

$$u - \frac{2}{u} = -2 \quad \text{folgt} \quad u^2 - 2 = -2u\,.$$

Quadratische Ergänzung macht daraus $(u+1)^2 = 3$, also ist $u = -1 \pm \sqrt{3}$. Die dritte Potenz davon ist

$$(-1 \pm \sqrt{3})^3 = -1 \pm 3\sqrt{3} - 3 \cdot 3 \pm 3\sqrt{3} = -10 \pm 6\sqrt{3}\,,$$

also ist tatsächlich $u = -1 + \sqrt{3}$ und

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 + \sqrt{3} - \frac{2}{-1+\sqrt{3}} = -1 + \sqrt{3} - \frac{2(-1-\sqrt{3})}{(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})} \\ &= -1 + \sqrt{3} + \frac{2 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2\,. \end{aligned}$$

Nachdem wir u in einfacher Form ausgedrückt haben, lassen sich nun auch die anderen beiden Lösungen berechnen:

$$u\rho = (-1+\sqrt{3}) \cdot \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} = \frac{(1-\sqrt{3}) + (3-\sqrt{3})i}{2}$$

und

$$u\bar{\rho} = (-1+\sqrt{3}) \cdot \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2} = \frac{(1-\sqrt{3}) - (3-\sqrt{3})i}{2}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{2}{u\rho} &= \frac{4\big((1-\sqrt{3}) - (3-\sqrt{3})i\big)}{(1-\sqrt{3})^2 + (3-\sqrt{3})^2} = \frac{4\big((1-\sqrt{3}) - (3-\sqrt{3})i\big)}{16 - 8\sqrt{3}} \\ &= \frac{\big((1-\sqrt{3}) - (3-\sqrt{3})i\big)(2+\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{-(1+\sqrt{3}) - (3+\sqrt{3})i}{2}\,, \end{aligned}$$

also

$$y_2 = u\rho - \frac{2}{u\rho} = \frac{(1-\sqrt{3}) + (3-\sqrt{3})i}{2} + \frac{(1+\sqrt{3}) + (3+\sqrt{3})i}{2} = 1 + 3i\,.$$

Entsprechend folgt $y_3 = u\bar{\rho} - \dfrac{2}{u\bar{\rho}} = 1 - 3i$.

Die Mathematiker des fünfzehnten und sechzehnten Jahrhunderts, auf die die Lösungsformel für kubische Gleichungen zurückgeht, hatten natürlich weder Computer noch Taschenrechner; auch kannten sie weder Dezimalbrüche noch komplexe Zahlen. Trotzdem konnten sie erstaunlich gut mit der Lösungsformel umgehen. In §3.2 des Buchs

TEO MORA: Solving Polynomial Equation Systems I: The Kronecker-Duval Philosophy, *Cambridge University Press*, 2003

sind zwei Beispiele für ihre Vorgehensweise zu finden:

Bei der Gleichung $x^3 + 3x - 14 = 0$ ist $p = 3$ und $q = -14$, also

$$u = \sqrt[3]{7 + \sqrt{7^2 + 1^3}} = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}\,.$$

Der numerische Näherungswert 2,414213562 für diese (reelle) Wurzel hilft uns nicht weiter. Wenn wir aber auf gut Glück versuchen, eine Wurzel zu finden, die sich auch in der Form $a + b\sqrt{2}$ mit ganzen Zahlen a und b schreiben läßt, Dann ist

$$(a + b\sqrt{2})^3 = a^3 + 3a^2b\sqrt{2} + 6ab^2 + 2b^3\sqrt{2} = 7 + 5\sqrt{2}\,,$$

also

$$a^3 + 6ab^2 = 7 \quad \text{und} \quad 3a^2b + 2b^3 = 5\,.$$

Damit haben wir, wie schon oben erwähnt, ein System von *zwei* kubischen Gleichungen anstelle von einer, jetzt allerdings suchen wir nur nach ganzzahligen Lösungen. Aus der ersten Gleichung können wir a ausklammern und erhalten $a(a^2 + 6b^2) = 7$. Somit muß a ein Teiler von sieben sein, d.h. $a = \pm 1$ oder $a = \pm 7$. Die negativen Zahlen scheiden aus, da die Klammer nicht negativ werden kann, und auch $a = 7$ ist nicht möglich, denn dann wäre die linke Seite mindestens gleich 7^3. Wenn es eine ganzzahlige Lösung gibt, muß daher $a = 1$ sein; durch Einsetzen folgt, daß dann mit $b = \pm 1$ die erste Gleichung in der Tat erfüllt ist. Die zweite Gleichung $b(3a^2 + 2b^2) = 5$ zeigt, daß auch b positiv sein muß und $a = b = 1$ beide Gleichungen erfüllt. Somit ist

$$u = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

für die reelle unter den drei Kubikwurzeln. Da wir eine Gleichung mit reellen Koeffizienten haben, muß auch das zugehörige v reell sein und kann genauso wie u bestimmt werden:

$$v = \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2} \quad \text{und} \quad x = u + v = 2\,.$$

Damit war die Gleichung für die Zwecke des sechzehnten Jahrhunderts gelöst, denn da es noch keine komplexen Zahlen gab, suchte auch niemand nach komplexen Lösungen.

Wir interessieren uns allerdings für komplexe Lösungen; die beiden noch fehlenden Lösungen können wir entweder berechnen als $u\rho + v\rho^2$ und $u\rho^2 + v\rho$, oder aber wir dividieren die Gleichung durch $x - 2$ und erhalten das quadratische Polynom $x^2 + 2x + 7$ mit den Nullstellen $-1 \pm \sqrt{6}\,i$.

Bei Gleichungen mit drei reellen Nullstellen führt die Lösungsformel, wie wir oben gesehen haben, *immer* übers Komplexe, aber auch damit wurden CARDANO und seine Zeitgenossen fertig. MORA betrachtet als Beispiel dafür die Gleichung $x^3 - 21x - 20 = 0$. Hier ist

$$u = \sqrt[3]{10 + \sqrt{10^2 - 7^3}} = \sqrt[3]{10 + \sqrt{-243}} = \sqrt[3]{10 - 9\sqrt{-3}}\,.$$

$\sqrt{-3}$ war für CARDANO im Gegensatz zu $\sqrt{2}$ keine Zahl; trotzdem rechnete er damit als mit einem abstrakten Symbol gemäß der Regel $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-3} = -3$.

Wenn wir wieder auf unser Glück vertrauen und einen Ansatz der Form $u = a + b\sqrt{-3}$ machen, kommen wir auf das Gleichungssystem

$$a^3 - 9ab^2 = 10 \quad \text{und} \quad 3a^2b - 3b^3 = 9\,.$$

Ausklammern von a *bzw.* b und Kürzen der zweiten Gleichung durch drei führt auf

$$a(a^2 - 9b^2) = 10 \quad \text{und} \quad b(a^2 - b^2) = 3\,.$$

Wenn es ganzzahlige Lösungen gibt, muß wegen der zweiten Gleichung $b = \pm 1$ oder $b = \pm 3$ sein. $b = \pm 1$ führt auf $a^2 - 1 = \pm 3$, also $b = 1$ und $a = \pm 2$; für $b = \pm 3$ läßt sich kein ganzzahliges a finden. Einsetzen in die erste Gleichung zeigt, daß $a = -2, b = 1$ das System löst, also ist $-2 + \sqrt{-3}$ eine der drei Wurzeln. Die anderen könnten wir finden, indem wir das Problem durch Abdividieren auf eine quadratische Gleichung reduzieren; alternativ – und das war wohl die Methode des 17. Jahrhunderts – können wir die Einschränkung aufheben, daß a und b ganze Zahlen sein müssen und auch Brüche mit kleinen Nennern zulassen.

Der kleinstmögliche Nenner ist zwei; der Ansatz

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = 10+9\sqrt{-3}$$

führt auf die Gleichungen $a(a^2-9b^2)=80$ und $b(a^2-b^2)=24$, wobei mindestens eine der Zahlen a und b ungerade sein muß, da wir ansonsten nichts neues bekommen. Da rechts jeweils gerade Zahlen stehen, sieht man leicht, daß dann beide Zahlen ungerade sein müssen; damit bleiben also für a nur die Möglichkeiten $a=\pm1$ oder ±5 und für b entsprechend $b=\pm1$ oder ±3. Einsetzen zeigt, daß wir mit $a=5, b=1$ und $a=-1, b=-3$ Lösungen bekommen. Die drei Kubikwurzeln von $-10+9\sqrt{-3}$ sind somit

$$-2+\sqrt{-3},\quad \frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\quad\text{und}\quad -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{-3}\,.$$

Zu jedem dieser drei möglichen Werte von u müssen wir jene Zahl v finden, für die $uv=\frac{21}{3}=7$ ist; in allen drei Fällen erhält man den Summanden $v=7/u$ dadurch, daß man einfach das Vorzeichen des Koeffizienten von $\sqrt{-3}$ ändert. Die drei mit so großem Aufwand ermittelten Lösungen der kubischen Gleichung sind also einfach die drei ganzen Zahlen

$$\begin{aligned}(-2+\sqrt{-3})+(-2-\sqrt{-3}) &= -4\,,\\ \left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)+\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right) &= \quad 5 \quad\text{und}\\ \left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{-3}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-3}\right) &= -1\,.\end{aligned}$$

Wie die Beispiele in diesem Paragraphen zeigen, haben wir beim exakten Lösen kubischer Gleichungen nach der hier betrachteten Formel oft mit komplizierten Ausdrücken zu tun, von denen sich nachher (nach teilweise recht trickreichen Ansätzen) herausstellt, daß sie sich tatsächlich sehr viel einfacher darstellen lassen. Dies ist ein allgemeines Problem der Computeralgebra, zu dem es leider keine allgemeine Lösung gibt: Wie D. RICHARDSON 1968 gezeigt hat, kann es keinen Algorithmus geben, der von zwei beliebigen reellen Ausdrücken entscheidet, ob sie gleich sind oder nicht. Dabei reicht es schon, wenn wir nur Ausdrücke betrachten, die aus ganzen Zahlen, den Grundrechenarten, der Sinus- und der Betragsfunktion sowie der Zahl π aufgebaut werden können.

§4: Biquadratische Gleichungen

Als nächstes wollen wir Gleichungen vom Grad vier betrachten. Auch sie lassen sich auflösen: Hier eliminiert man den kubischen Term von

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

durch die Substitution $x = y + \frac{a}{4}$; dies führt auf eine Gleichung der Form

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 .$$

Zu deren Lösung benutzen wir einen anderen Trick als im kubischen Fall: Wir versuchen, die Quadrate der Nullstellen durch eine geeignete Verschiebung zu Lösungen einer quadratischen Gleichung zu machen, die wir dann mit der bekannten Lösungsformel auflösen können.

Wir nehmen also an, wir hätten eine Lösung z dieser Gleichung und betrachten dazu für eine zunächst noch beliebige Zahl u die Zahl $z^2 + u$. Da $z^4 + pz^2 + qz + r$ verschwindet, ist $z^4 = -pz^2 - qz - r$, also

$$(z^2 + u)^2 = z^4 + 2uz^2 + u^2 = (2u - p)z^2 - qz + u^2 - r .$$

Falls rechts das Quadrat eines linearen Polynoms $sz + t$ steht, ist

$$(z^2 + u)^2 = (sz + t)^2 \Longrightarrow z^2 + u = \pm(sz + t) ,$$

wir müssen also nur die beiden quadratischen Gleichungen

$$z^2 \mp (sz + t) + u = 0$$

lösen, um die Lösungen der biquadratischen Gleichung zu finden.

Natürlich ist die rechte Seite $(2u - p)z^2 - qz + u^2 - r$ im allgemeinen kein Quadrat eines linearen Polynoms in z; wir können aber hoffen, daß es zumindest für gewisse spezielle Werte der bislang noch willkürlichen Konstante u eines ist.

Ein quadratisches Polynom $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$ ist genau dann Quadrat eines linearen, wenn die beiden Nullstellen der quadratischen Gleichung $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ übereinstimmen. Diese Nullstellen können wir einfach berechnen:

$$z^2 + \frac{\beta}{\alpha} z + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Longrightarrow z = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}} \; .$$

Die Ausgangsgleichung ist genau dann das Quadrat eines linearen Polynoms, wenn beide Lösungen übereinstimmen, wenn also der Ausdruck unter der Wurzel verschwindet. Bringen wir diesen auf den Hauptnenner, kommen wir auf die Bedingung $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$. In unserem Fall ist $\alpha = (2u - p)$, $\beta = -q$ und $\gamma = u^2 - r$; wir erhalten also die Bedingung

$$q^2 - 4(2u - p)(y^2 - r) = -8u^3 + 4pu^2 + 8ru + q^2 - 4pr = 0 \; .$$

Dies ist eine kubische Gleichung für u, die wir mit der Methode aus dem vorigen Abschnitt lösen können. Ist u_0 eine der Lösungen, so steht in der Gleichung

$$(z^2 + u_0)^2 = (2u_0 - p)z^2 - qz + u_0^2 - r \; .$$

rechts das Quadrat eines linearen Polynoms in z, das wir – da wir alle Koeffizienten kennen – problemlos hinschreiben können. Dies führt dann nach Wurzelziehen zu zwei quadratischen Gleichungen für z, deren Wurzeln die Nullstellen der biquadratischen Gleichung sind.

Es wäre nicht schwer, mit Hilfe der Lösungsformel für kubische Gleichungen, eine explizite Formel für die vier Lösungen hinzuschreiben; sie ist allerdings erstens deutlich länger und zweitens für die praktische Berechnung reeller Nullstellen mindestens genauso problematisch wie die für kubische Gleichungen.

§5: Gleichungen höheren Grades

Nach der (mehr oder weniger) erfolgreichen Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen in der ersten Hälfte des sechzehnten Jahrhunderts beschäftigten sich natürlich viele Mathematiker mit dem nächsten Fall, der Gleichung fünften Grades. Hier gab es jedoch über 250

Jahre lang keinerlei Fortschritt, bis zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts ABEL glaubte, eine Lösung gefunden zu haben. Er entdeckte dann aber recht schnell seinen Fehler und bewies stattdessen 1824, daß es *unmöglich* ist, die Lösungen einer allgemeinen Gleichung fünften (oder höheren) Grades durch Grundrechenarten und Wurzeln auszudrücken.

Die Grundidee seines Beweises liegt in der Betrachtung von Symmetrien innerhalb der Lösungsmenge: Man betrachtet die Menge aller Permutationen der Nullstellenmenge, die durch Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erreicht werden können, wobei φ sowohl mit der Addition als auch der Multiplikation verträglich sein muß. ABEL zeigt, daß diese Permutationen für allgemeine Gleichungen vom Grad größer vier eine (in heutiger Terminologie) *nichtauflösbare* Gruppe bilden und daß es aus diesem Grund keine Lösungsformel geben kann, in der nur Grundrechenarten und Wurzeln vorkommen. Ein großer Teil dieser Vorlesung wird sich damit beschäftigen, dies genauer zu verstehen.

Der norwegische Mathematiker NILS HENRIK ABEL (1802–1829) ist trotz seinen frühen Todes (an Tuberkulose) Initiator vieler Entwicklungen der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts; Begriffe wie abelsche Gruppen, abelsche Integrale, abelsche Funktionen, abelsche Varietäten, die auch in der heutigen Mathematik noch allgegenwärtig sind, verdeutlichen seinen Einfluß. Zu seinem 200. Geburtstag stiftete die norwegische Regierung einen ABEL-Preises für Mathematik mit gleicher Ausstattung und Vergabebedingungen wie die Nobelpreise; erster Preisträger war 2003 JEAN-PIERRE SERRE (*1926) vom Collège de France für seine Arbeiten über algebraische Geometrie, Topologie und Zahlentheorie.

Der ABELsche Satz besagt selbstverständlich nicht, daß Gleichungen höheren als vierten Grades *unlösbar* seien; er sagt nur, daß es *im allgemeinen* nicht möglich ist, die Lösungen durch Wurzelausdrücke in den Koeffizienten darzustellen: Für eine allgemeine Lösungsformel muß man also außer Wurzeln und Grundrechenarten noch weitere Funktionen zulassen. Beispielsweise fanden sowohl HERMITE als auch KRONECKER 1858 Lösungsformeln für Gleichungen fünften Grades mit sogenannten elliptischen Modulfunktionen; 1870 löste JORDAN damit Gleichungen beliebigen Grades.

§6: Der Wurzelsatz von Viète

In einem Großteil dieser Vorlesung wird es um Methoden gehen, wie man trotz des Fehlens brauchbarer Lösungsformeln Aussagen über die Nullstellen von Polynomgleichungen höheren Grades machen kann. Die folgende Methode führt nur in speziellen Fällen, dann aber mit sehr geringem Aufwand zu Nullstellen.

Wir haben bislang, wie aus der Schule und auch der Analysis gewohnt, den Buchstaben x sowohl als Bezeichnung für eine Unbekannte als auch in den Lösungsformeln als Bezeichnung für eine der Lösungen verwendet. Die folgenden Überlegungen werden aber wohl klarer, wenn wir zwischen den beiden Bedeutungen unterscheiden; daher werde ich ab jetzt große Buchstaben für Variablen und kleine Buchstaben für Zahlen (einschließlich Koeffizienten) benutzen. Ein Polynom vom Grad n wird somit geschrieben als

$$f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0\,,$$

und sein Wert an der Stelle x ist

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0\,.$$

Ist z eine Nullstelle von f, also $f(z) = 0$, so ist f ohne Rest durch das Polynom $X - z$ teilbar: Wenden wir nämlich den Algorithmus zur Polynomdivision mit Rest an auf f und $X-z$, erhalten wir ein Polynom q vom Grad $n - 1$ als Quotient und einen Rest r, dessen Grad kleiner ist als der Grad eins des Divisors $X - z$; der Rest muß daher eine Konstante sein. Setzen wir in der Gleichung

$$f = q \cdot (X - z) + r$$

auf beiden Seiten z für die Variable X ein, erhalten wir links den Wert null, rechts wird $X - z$ zu $z - z = 0$, so daß nur r übrig bleibt. Also muß $r = 0$ sein; f ist ohne Rest durch $X - z$ teilbar.

Mit dem Quotienten q können wir genauso verfahren – wie wir im Laufe der Vorlesung lernen werden, hat jedes nichtkonstante reelle oder komplexe Polynom mindestens eine komplexe Nullstelle –, und wir erhalten schließlich eine Zerlegung

$$f = (X - z_1)(X - z_2)\cdots(X - z_n)\,.$$

Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -\sigma_1(z_1,\dots,z_n) \underset{\text{def}}{=} -(z_1+\cdots+z_n)\\
a_{n-2} &= \sigma_2(z_1,\dots,z_n) \underset{\text{def}}{=} \sum_{i<j} z_i z_j\\
a_{n-3} &= -\sigma_3(z_1,\dots,z_n) \underset{\text{def}}{=} -\sum_{i<j<k} z_i z_j z_k\\
\vdots \quad & \quad \vdots\\
a_0 &= (-1)^n\sigma_n(z_1,\dots,z_n) \underset{\text{def}}{=} (-1)^n z_1\cdots z_n\,.
\end{aligned}$$

Allgemein ist a_{n-r} bis aufs Vorzeichen gleich der Summe alle Produkte aus r Werten z_i mit verschiedenem Index. Diese Summen bezeichnet man als die *elementarsymmetrischen Funktionen* $\sigma_r(z_1,\dots,z_n)$ und die obigen Gleichungen als den Wurzelsatz von VIÈTE.

FRANÇOIS VIÈTE (1540–1603) studierte Jura an der Universität Poitiers, danach arbeitete er als Hauslehrer. 1573, ein Jahr nach dem Massaker an den Hugenotten, berief ihn CHARLES IX (obwohl VIÈTE Hugenotte war) in die Regierung der Bretagne; unter HENRI III wurde er geheimer Staatsrat. 1584 wurde er auf Druck der katholischen Liga vom Hofe verbannt und beschäftigte sich fünf Jahre lang nur mit Mathematik. Unter HENRI IV arbeitete er wieder am Hof und knackte u.a. verschlüsselte Botschaften an den spanischen König PHILIP II. In seinem Buch *In artem analyticam isagoge* rechnete er als erster systematisch mit symbolischen Größen.

Für eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ besagt er einfach, daß die Summe der Lösungen gleich $-p$ und das Produkt gleich q ist. Das hatten wir bereits in bei der Lösung kubischer Gleichungen ausgenutzt, um zwei Zahlen mit vorgegebenen Werten für Summe und Produkt zu berechnen.

Diese Summen, die sogenannten elementarsymmetrischen Funktionen, sind für r-Werte im mittleren Bereich recht umfangreich, die beiden Fälle $r = 0$ und $r = n - 1$ können aber gelegentlich ganz nützlich sein, um Lösungen zu erraten:

Falls wir aus irgendeinem Grund erwarten, daß alle Nullstellen eine Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ganzzahlig sind, folgt aus der Tatsache, daß ihr Produkt gleich $(-1)^n a_0$ ist, daß sie allesamt Teiler von a_0 sein müssen. Außerdem ist ihre Summe gleich $-a_{n-1}$. (Wie wir später sehen weden, sind die ganzzahligen Nullstellen auch dann Teiler von a_0, wenn nicht alle Nullstellen ganz sind.)

Bei der Gleichung $f(x) = x^3 - 7x + 6 = 0$ etwa, die uns in §3 so viele Schwierigkeiten machte, ist das Produkt aller Nullstellen gleich -6; *falls* sie alle ganzzahlig sind, kommen also nur $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ und ± 6 in Frage. Aus diesen acht Zahlen müssen wir drei (nicht notwendigerweise verschiedene) auswählen mit Produkt -6 und Summe null. Das geht offensichtlich nur mit $1, 2$ und -3; Einsetzen zeigt, daß dies auch tatsächlich Nullstellen sind.

Man beachte, daß dieses Einsetzen unbedingt notwendig ist: Bei der Gleichung $g(x) = x^3 - 6x + 6 = 0$ hätten wir genauso vorgehen können und wären auf dieselben drei Kandidaten gekommen, aber $g(1) = 1, g(2) = 2$ und $g(-3) = -3$. Hier führt aber die Lösungsformel aus §3 relativ schnell ans Ziel: Einsetzen der Parameter $p = -6$ und $q = 6$ in die Lösungsformel führt zunächst auf

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 - 8}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

für die reelle Wurzel; die erste Lösung ist also

$$x_1 = u - \frac{p}{3u} = -\sqrt[3]{2} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\,.$$

Für die zweite und dritte Lösung müssen wir mit $u\rho$ *bzw.* $u\bar{\rho}$ anstelle von u arbeiten und erhalten

$$x_2 = -\sqrt[3]{2}\,\rho - \frac{2}{\sqrt[3]{2}\,\rho} = -\sqrt[3]{2}\,\rho - \sqrt[3]{4}\,\bar{\rho} \qquad \text{und}$$

$$x_3 = -\sqrt[3]{2}\,\rho - \frac{2}{\sqrt[3]{2}\,\bar{\rho}} = \sqrt[3]{2}\,\bar{\rho} - \sqrt[3]{4}\,\rho\,,$$

was nach Einsetzen von $\rho = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ und $\bar{\rho} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ auf die beiden komplexen Lösungen

$$\begin{aligned} x_{2/3} &= -\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \frac{\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\right)}{2}i \end{aligned}$$

führt. Natürlich erfüllen auch diese Zahlen den Satz von VIÈTE, jedoch hilft uns dieser nicht, sie zu erraten.

Auch die ebenfalls aus §3 bekannte Gleichung $f(x) = x^3 - 21x - 20 = 0$ läßt sich nach VIÈTE leicht lösen: Hier ist das Produkt aller Nullstellen gleich 20; *falls* sie alle ganzzahlig sind, kommen also nur $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10$ und ± 20 in Frage. Aus diesen zwölf Zahlen müssen wir drei (nicht notwendigerweise verschiedene) auswählen mit Produkt 20 und Summe null. Das geht offensichtlich nur mit $-1, -4$ und 5, und wieder zeigt Einsetzen, daß dies auch tatsächlich Nullstellen sind.

Betrachten wir als nächstes Beispiel das Polynom

$$f(x) = x^4 + 14x^3 - 52x^2 - 14x + 51$$

mit $a_0 = 51 = 3 \cdot 17$. Da das Produkt aller Nullstellen diesen Wert haben muß, kommen – *falls* alle Nullstellen ganzzahlig sind – für diese nur die Werte $\pm 1, \pm 3, \pm 17$ und ± 51 in Frage. Wäre eine der Nullstellen ± 51, müßten alle anderen den Betrag eins haben und die Summe könnte nicht gleich -14 sein. Daher muß eine Nullstelle Betrag drei und eine Betrag 17 haben, die beiden anderen Betrag eins. Produkt 51 und Summe -14 erzwingt dabei offensichtlich, daß sowohl +1 als auch -1 Nullstellen sind, außerdem -17 und +3. Einsetzen zeigt, daß alle vier auch tatsächlich Nullstellen sind.

Beim Polynom

$$f(x) = x^6 + 27x^5 - 318x^4 - 5400x^3 - 10176x^2 + 27648x + 32768$$

schließlich ist $a_0 = 32768 = 2^{15}$; hier wissen wir also nur, daß – sofern alle Nullstellen ganzzahlig sind – jede Nullstelle die Form $\pm 2^i$ haben muß, wobei die Summe aller Exponenten gleich 15 sein muß und die Anzahl der negativen Vorzeichen gerade. Einsetzen zeigt, daß

$$-1, \quad 2, \quad -4, \quad -8, \quad 16, \quad -32$$

die Nullstellen sind.

Man beachte, daß diese Vorgehensweise nur funktioniert, wenn das Polynom höchsten Koeffizienten eins hat; andernfalls ist das Produkt der Nullstellen gleich dem Quotienten aus konstantem Koeffizienten und führendem Koeffizienten mal $(-1)^{\text{Grad}}$.

§ 7: Symmetrische Polynome

Die elementarsymmetrischen Funktionen σ_i sind Polynome, die sich nicht verändern, wenn ihre Variablen in irgendeiner Weise permutiert werden. Solche Polynome bezeichnen wir als symmetrisch:

Definition: *a)* Die *symmetrische Gruppe* $\mathfrak{S}_n$ ist die Menge aller bijektiver Abbildungen der Menge $\{1, \dots, n\}$ auf sich selbst; ihre Elemente heißen *Permutationen.*
b) Ein Polynom f in den n Variablen $X_1, \dots, X_n$ heißt *symmetrisch,* wenn für jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ gilt:

$$f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)}) = f(X_1, \dots, X_n)\,.$$

Der folgende Satz besagt, daß sich jedes symmetrische Polynom durch die elementarsymmetrischen ausdrücken läßt:

Satz: f sei ein symmetrisches Polynom in $X_1, \dots, X_n$. Dann gibt es ein Polynom g in n neuen Variablen $Y_1, \dots, Y_n$, so daß gilt

$$f(X_1, \dots, X_n) = g\big(\sigma_1(X_1, \dots, X_n), \dots, \sigma_N(X_1, \dots, X_n)\big)\,.$$

Beweis: Zur Konstruktion von g ordnen wir die Monome $X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$ lexikographisch an, d.h. das Monom $X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$ kommt vor $X_1^{f_1} \cdots X_n^{f_n}$, wenn die erste von Null verschiedene Differenz $e_i - f_i$ positiv ist. Da f ein symmetrisches Polynom ist, muß im ersten, dem sogenannten *führenden* Monom, $e_1 \ge e_2 \ge \cdots \ge e_n$ sein, denn wegen der Symmetrie muß mit $X_1^{e_1}\cdots X_n^{e_n}$ auch jedes Monom $X_1^{e_{\pi(1)}}\cdots X_n^{e_{\pi(n)}}$ vorkommen. Der Koeffizient von $X_1^{e_1}\cdots X_n^{e_n}$ sei a.

Das führende Monom von σ_i ist $X_1\cdots X_i$; setzen wir $\delta_i = e_i - e_{i-1}$ für $i = 1,\dots,n-1$ und $\delta_n = e_n$, hat daher $\sigma_1^{\delta_1}\cdots\sigma_n^{\delta_n}$ ebenfalls das führende Monom $X_1^{e_1}\cdots X_n^{e_n}$.

Im der Differenz $f_1 = f - a\sigma_1^{\delta_1}\cdots\sigma_n^{\delta_n}$ heben sich somit die führenden Monome weg, und f_1 hat ein führendes Monom, das kleiner ist als $X_1^{e_1}\cdots X_n^{e_n}$. Wir schreiben $f = a\sigma_1^{\delta_1}\cdots\sigma_n^{\delta_n} + f_1$, wenden die gleiche Konstruktion an auf f_1, und so weiter. Da die führenden Monome dabei immer kleiner werden und es nur endlich viele Monome gibt, die lexikographisch kleiner sind als ein gegebenes Monom, endet diese Konstruktion nach endlich vielen Schritten und drückt f aus als Linearkombination von Monomen in den σ_i. Das gesuchte Polynom g ist nun einfach die entsprechende Linearkombination mit Monomen in den Y_i an Stelle der σ_i.

■

Als Beispiel betrachten wir das symmetrische Polynom $f = X^3Y + XY^3$. Der führende Term ist X^3Y, wir haben also $e_1 = 3$ und $e_2 = 1$; damit ist $\delta_1 = 2$ und $\delta_2 = 1$. Wir subtrahieren im ersten Schritt

$$\sigma_1^{\delta_1}\sigma_2^{\delta_2} = (X+Y)^2(XY) = X^3Y + 2X^2Y^2 + XY^3$$

und erhalten

$$f_1 = f - (X^3Y + 2X^2Y^2 + XY^3) = -2X^2Y^2\,.$$

Da es nur ein Monom gibt, ist dieses führend; wir haben $e_1 = e_2 = 2$, also $\delta_1 = 0$ und $\delta_2 = 2$. Daher subtrahieren wir $-2\sigma_2^2$ und erhalten

$$f_2 = f_1 + 2(XY)^2 = 0\,.$$

Somit ist

$$f = \sigma_1^2\sigma_2 + f_1 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 + f_2 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2\,.$$

Kombinieren wir den gerade bewiesenen Satz mit dem Wurzelsatz von VIÈTE, besagt er, daß sich jedes symmetrische Polynom in den Nullstellen eines Polynoms als Polynom in den Koeffizienten schreiben läßt:

Satz: P sei ein symmetrisches Polynom in $Z_1, \dots, Z_n$, und für jedes n-tupel $z = (z_1, \dots, z_n)$ sei

$$f^{(z)} = X^n + a_{n-1}^{(z)} X^{n-1} + \cdots + a_1^{(z)} X + a_0^{(z)} = (X - z_1) \cdots (X - z_n) .$$

Dann gibt es ein Polynom Q in neuen Variablen $A_0, \dots, A_{n-1}$ mit der Eigenschaft, daß für alle n-tupel $z = (z_1, \dots, z_n)$ gilt:

$$P(z) = Q\left(a_0^{(z)}, \dots, a_{n-1}^{(z)}\right) .$$

■

§8: Die Diskriminante eines Polynoms

Die Lösungsformel

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

für eine quadratische Gleichung führt genau dann auf zwei verschiedene Lösungen, wenn der Ausdruck unter der Wurzel nicht verschwindet. Man bezeichnet $\Delta = p^2 - 4q$ als die *Diskriminante* der Gleichung. Wir wollen in diesem Paragraphen auch für Gleichungen höheren Grades eine entsprechende Größe einführen; sie soll genau dann verschwinden, wenn die Gleichung mindestens eine mehrfache Nullstelle hat.

Für ein Polynom, das bereits als Produkt von Linearfaktoren vorliegt, läßt sich so eine Diskriminante leicht konstruieren:

Definition: Die Diskriminante des Polynoms $(X - z_1) \cdots (X - z_n)$ ist

$$\Delta \underset{\text{def}}{=} \prod_{i<j} (z_i - z_j)^2 .$$

Für die quadratische Gleichung führt dies auf

$$(x_1 - x_2)^2 = \left(-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right)^2 = p^2 - 4q$$

wie oben.

Dadurch, daß die Differenzen der Nullstellen in obiger Definition quadriert werden, ist die Diskriminante unabhängig von der Reihenfolge der Nullstellen – was sie natürlich sinnvollerweise ohnehin sein muß; sie ist daher eine symmetrische Funktion der Nullstellen und läßt sich als Polynom in den elementarsymmetrischen Funktionen und damit in den Koeffizienten des Polynoms schreiben.

Für das kubische Polynom $(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$ ist

$$\begin{gathered}\Delta = (z_1 - z_2)^2(z_1 - z_3)^2(z_2 - z_3)^2 \\ = z_1^4z_2^2 - 2z_1^4z_2z_3 + z_1^4z_3^2 - 2z_1^3z_2^3 + 2z_1^3z_2^2z_3 + 2z_1^3z_2z_3^2 - 2z_1^3z_3^3 \\ +z_1^2z_2^4 + 2z_1^2z_2^3z_3 - 6z_1^2z_2^2z_3^2 + 2z_1^2z_2z_3^3 + z_1^2z_3^4 \\ -2z_1z_2^4z_3 + 2z_1z_2^3z_3^2 + 2z_1z_2^2z_3^3 - 2z_1z_2z_3^4 + z_2^4z_3^2 - 2z_2^3z_3^3 + z_2^2z_3^4\end{gathered}$$

fast zu grausam, um damit weiter zu rechnen; da wir immer von der Gleichung $X^3 + pX + q$ ausgehen, müssen wir das zum Glück auch nicht: Nach dem Satz von VIÈTE ist die Summe der drei Nullstellen gleich dem negativen Koeffizienten von X^2; da wir keinen X^2-Term haben ist diese Summe also null, d.h. $z_3 = -z_1 - z_2$. Damit ist

$$\begin{gathered}\Delta = (z_1 - z_2)^2(2z_1 + z_2)^2(2z_2 + z_1)^2 \\ = 4z_1^6 + 12z_1^5z_2 - 3z_1^4z_2^2 - 26z_1^3z_2^3 - 3z_1^2z_2^4 + 12z_1z_2^5 + 4z_2^6\end{gathered}$$

Nach dem Wurzelsatz von VIÈTE ist

$$\begin{aligned}p &= z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = z_1z_2 - z_1(z_1 + z_2) - z_2(z_1 + z_2) \\ &= z_1z_2 - (z_1 + z_2)^2 = -z_1^2 - z_1z_2 - z_2^2\end{aligned}$$

und $q = -z_1z_2z_3 = z_1z_2(z_1 + z_2) = z_1^2z_2 + z_1z_2^2$.

Wir gehen nun vor wie im Beweis des Hauptsatzes über symmetrische Funktionen: Um im Ausdruck für die Diskriminante den Term $4z_1^2$ zum Verschwinden zu bringen, addieren wir $4p^3$ und erhalten (nach einiger Rechnung) das Ergebnis

$$\Delta + 4p^3 = -27z_1^4z_2^2 - 54z_1^3z_2^3 - 27z_1^2z_2^4\ ;$$

addieren wir dazu noch $27q^2$, wird $\Delta+4p^3+27q^2 = 0$. Die Diskriminante des Polynoms $X^3 + pX + q$ ist also $\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$.

§9: Der casus irreducibilis bei kubischen Gleichungen

Falls alle drei Nullstellen des kubischen Polynoms X^3+pX+q mit reellen Koeffizienten p, q reell und verschieden sind, ist die Diskriminante als Produkt von Quadraten reeller Zahlen positiv. In

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\ ,$$

ist daher

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{27q^2 + 4p^2}{108} = \frac{-\Delta}{108}$$

negativ; in diesem Fall steht also unter der Quadratwurzel eine negative Zahl, so daß u^3 einen nichtverschwindenden Imaginärteil hat. *Falls alle drei Nullstellen reel sind, muß also u eine nichtreelle komplexe Zahl sein.* Man bezeichnet den Fall einer positiven Diskrimante bei einer kubischen Gleichung aus diesem Grund als den *casus irreducibilis;* mit der Irreduzibilität von Polynomen, die wir bald betrachten werden, hat dies nichts zu tun.

Wir wollen uns überlegen, daß umgekehrt im Falle einer positiven Diskriminante auch alle drei Lösungen reell sein müssen. Dazu machen wir einen trigonometrischen Ansatz, mit dem wir sie ohne Umweg über die komplexen Zahlen rein reell bestimmen können.

Wir schreiben $x = r\cos\varphi$ mit einer nichtnegativen Zahl r und einem Winkel φ zwischen 0 und π. Dann ist

$$x^3 + px + q = r^3\cos^3\varphi + pr\cos\varphi + q\ .$$

Nach den EULERschen Formeln ist

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = (e^{i\varphi})^3 = e^{3i\varphi} = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi\ .$$

Andererseits ist nach dem binomischen Lehrsatz

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi\ ;$$

durch Vergleich der Realteile sehen wir, daß

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi(\cdot(1-\cos^2\varphi)\\ &= 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\end{aligned}$$

ist und damit $\cos^3\varphi = \dfrac{\cos 3\varphi + 3\cos\varphi}{4}$.

Somit ist

$$\begin{aligned}&\frac{r^3}{4}(\cos 3\varphi + 3\cos\varphi) + pr\cos\varphi + q\\ &= \frac{r^3}{4}\cos 3\varphi + r\cdot\left(\frac{3}{4}r^2 + p\right)\cos\varphi + q = 0\,.\end{aligned}$$

Wir können diese Gleichung vereinfachen, wenn wir r so wählen, daß die Klammer verschwindet: Mit $r = \sqrt{-4p/3}$ erhalten wir

$$\frac{r^4}{3}\cos 3\varphi + q = 0$$

und damit $\cos 3\varphi = -\dfrac{4q}{r^3} = -4q\sqrt{-\dfrac{27}{4^3p^3}} = -\dfrac{q}{2}\sqrt{\dfrac{-27}{p^3}}$.

r ist eine reelle Zahl, denn da $-\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0$ ist und $q^2 \geq 0$, muß p negativ sein. Außerdem hat der Ausdruck für $\cos 3\varphi$ höchstens den Betrag eins, denn sein Quadrat ist

$$\frac{q^2}{4}\cdot\frac{-27}{p^3} = \frac{27q^2}{-4p^3}\,,$$

wobei hier im Nenner eine positive und im Zähler zumindest eine nichtnegative Zahl steht. Wegen $\Delta < 0$ ist $27q^2 < -4p^3$, also hat der Bruch einen Wert zwischen 0 und 1, und obiger Ausdruck liegt zwischen -1 und 1. Somit können wir einen Winkel φ aus $[0, \pi]$ finden mit $\cos 3\varphi = -q/2\sqrt{-27/p^3}$.

Tatsächlich finden wir dann nicht nur einen Winkel, sondern drei, denn $\cos 3\varphi$ nimmt im Intervall $[0, \pi]$ jeden Wert aus $[-1, 1]$ dreimal an: Ist $\varphi_1 \in [0, \frac{1}{3}\pi]$ der kleinste solche Winkel, sind $\varphi_{2/3} = \frac{2}{3}\pi \pm \varphi_1$ die beiden anderen. Die drei Lösungen der gegebenen Gleichung sind also

$$x_i = r\cos\varphi_i = \sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos\varphi_i \quad \text{mit} \quad \cos 3\varphi_i = -\frac{q}{2}\sqrt{\frac{-27}{p^3}}\,,$$

und sie sind allesamt reell.

Man beachte, daß wir hier nicht nur Grundrechenarten und Wurzeln verwenden, um die x_i auszudrücken: Um die Winkel φ_i zu bestimmen, brauchen wir den Arkuskosinus und zur Berechnung der x_i zusätzlich noch den Kosinus.