Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

1. Dezember 2015

12. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Zeigen Sie: Jede endliche Gruppe G mit gerader Ordnung enthält mindestens eine Involution, d.h. ein Element $g \neq 1$ mit $g^2 = 1$. (*Hinweis:* Betrachten Sie die Menge aller $x \in G$ mit $x \neq x^{-1}$, und zeigen Sie, daß deren Elementanzahl gerade ist!)

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) Finden Sie alle Nullstellen des Polynoms

$$X^6 - 2X^5 - X^4 + 4X^3 - 10X^2 + 16X - 8\,!$$

b) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$ vom Grad sechs, das $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ als Nullstellen hat!

c) Ist f dadurch eindeutig bestimmt?

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
Wie viele natürliche Zahlen $x \leq 1000$ gibt es, für die

$$\begin{aligned} & x \equiv -2 \bmod 27 \\ \text{und} \quad & x \equiv +2 \bmod 37 \end{aligned}$$

ist? Bestimmen Sie diese Zahlen!

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie den Inhalt des Polynoms $10X^6 - 360$, und zerlegen Sie es in $\mathbb{Z}[X]$ in seine irreduziblen Faktoren! Beweisen Sie dabei die Irreduzibilität der polynomialen Faktoren.

b) Wie sieht die entsprechende Zerlegung in $\mathbb{Q}[X]$ aus? Welche der über $\mathbb{Z}[X]$ irreduziblen Polynome lassen sich weiter zerlegen?

c) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen des Polynoms!

Aufgabe 5: *(8 Punkte)*

a) Bestimmen Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ von möglichst kleinem Grad derart, daß $x = \sqrt{2}+\sqrt{5}$ im Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ liegt!

b) Zeigen Sie, daß $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ und $\sqrt{10}$ in $\mathbb{Q}(X)$ liegen!

c) Welchen Grad hat $\mathbb{Q}(x)$ über $\mathbb{Q}$?

d) Ist $\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}$ Galoissch?

e) Bestimmen Sie alle Körper K mit $\mathbb{Q} < K < \mathbb{Q}(x)$!

Keine Abgabe – Semesterende