Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

24. November 2015

11. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Zeigen Sie:

a) Sind $f, g \in k[X]$ separable Polynome über einem Körper k, so sind auch $\mathrm{ggT}(f, g)$ und $\mathrm{kgV}(f, g)$ separabel.

b) Für ein Polynom $f = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in k[X]$ über einem beliebigen Körper k bezeichnen wir

$$f' = d a_d X^{d-1} + (d-1) a_{d-1} X^{d-2} + \cdots + 2a_2 X + a_1$$

als die Ableitung von f. Zeigen Sie, daß für zwei Polynome $f, g \in k[X]$ gilt: $(f \pm g)' = f' \pm g'$ und $(fg)' = fg' + f'g$!

c) $K/\mathbb{Q}$ sei ein Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, daß jedes irreduzible Polynom $f \in K[X]$ separabel ist!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) Bestimmen Sie für $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ die Gruppe aller Automorphismen $L \to L$!

b) Zeigen Sie, daß $L/\mathbb{Q}$ eine Galoissche Erweiterung ist!

c) Zeigen Sie, daß $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$ isomorph ist zur Kleinschen Vierergruppe $V_4 = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$!

d) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \leq K \leq L$ und die zugehörigen Untergruppen der Galois-Gruppe!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Geben Sie für den Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ die Norm- und die Spurabbildung $K \to \mathbb{Q}$ explizit an! Ist eine der beiden Abbildungen surjektiv?

b) $R \subset K$ sei der Ring aller Elemente der Form $a + b\sqrt{-5}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, daß ein Element $x \in K$ genau dann in R liegt, wenn sowohl seine Norm als auch seine Spur ganz sind!

c) Ein Element $x \in R$ ist irreduzibel, wenn seine Norm prim ist, und es ist genau dann eine Einheit, wenn es Norm eins hat.

d) Zeigen Sie, daß $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ zwei verschiedene Zerlegungen der Sechs in Produkte irreduzibler Elemente von R sind, so daß R kein faktorieller Ring sein kann!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 1. Dezember 2015, um 15.30 Uhr