WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

27. Oktober 2015

7. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) m sei eine ganze Zahl. Zeigen Sie, daß der Ring $\mathbb{Z}/(m)$ genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn $m \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist!

b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}/(m)$ dann sogar ein Körper ist!

c) p sei eine Primzahl, und für jede ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ bezeichne $\overline{a}$ die Nebenklasse $a + (p)$ von a in $\mathbb{Z}/(p)$. Zeigen Sie: Die Abbildung, die jedem $f = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ das Polynom $\overline{f} = \overline{a_n}\,X^n + \cdots + \overline{a_1}\,X + \overline{a_0} \in \big(\mathbb{Z}/(p)\big)[X]$ zuordnet, ist ein Ringhomomorphismus!

d) Zeigen Sie: Ist $\overline{f}$ irreduzibel und f primitiv, so ist auch f irreduzibel!

e) Folgt umgekehrt aus der Irreduzibilität von f die von $\overline{f}$?

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) $f = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ sei ein primitives Polynom und p sei eine Primzahl, die alle a_i außer a_n teilt und deren Quadrat kein Teiler von a_0 ist. Zeigen Sie, daß f irreduzibel ist!
Hinweis: Sie können entweder Aufgabe 1c) verwenden oder ähnlich vorgehen wie beim Beweis, daß das Produkt zweier primitiver Polynome primitiv ist.

b) Zeigen Sie: Ein Polynom $f = f(X) \in R[X]$ über einem Integritätsbereich R ist genau dann irreduzibel, wenn das Polynom $f(X + 1)$ irreduzibel ist.

c) Schreiben Sie $f = \dfrac{X^p - 1}{X - 1}$ als Polynom, und folgern Sie aus *b)* und *c)*, daß dieses irreduzibel ist!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Kern und Bild des Homomorphismus $\begin{cases} k[X] \to \mathbb{C} \\ X \mapsto \sqrt[3]{2} \end{cases}$ für $k = \mathbb{Q}$ und für $k = \mathbb{R}$!

b) Zeigen Sie, daß die Gleichung $f(x) = 0$ im Bild jeweils genau eine Lösung hat!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

k sei ein Körper, und $f = uf_1^{e_1} \cdots f_n^{e_n}$ sei die Zerlegung des Polynoms $f \in k[X]$ in irreduzible Bestandteile f_i und eine Einheit u. Zeigen Sie: Dann ist

$$k[X]/(f) \cong k[X]/(f_1^{e_1}) \oplus \cdots \oplus k[X]/(f_n^{e_n})\,.$$

Abgabe bis zum Dienstag, dem 3. November 2015, um 15.30 Uhr