Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

20. Oktober 2015

6. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

G sei eine Gruppe und $U \le G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie:

a) Für jedes $g \in G$ ist $U^g \underset{\text{def}}{=} g^{-1}Ug$ eine Untergruppe von G.

b) Der Durchschnitt aller Untergruppen U^g ist ein Normalteiler von G.

c) $H = \{g \in G \mid U^g = U\}$ ist eine Untergruppe von G.

d) U ist ein Normalteiler von H.

e) Die Anzahl verschiedener Untergruppen U^g ist gleich dem Index von H.

f) U sei eine maximale Untergruppe von G, d.h. außer G selbst gibt es keine Untergruppe von G, die U echt enthält. Falls es ein $g \notin U$ gibt, für das $g^{-1}Ug = U$ ist, ist U ein Normalteiler von G.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, die jedem Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ den Funktionswert $f(1)$ zuordnet, ein Homomorphismus ist, und bestimmen Sie Kern und Bild von φ!

b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$, die jedem Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ den Funktionswert $f(i)$ zuordnet, ein Homomorphismus ist, und bestimmen Sie Kern und Bild von ψ!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) R und S seien Ringe. Die direkte Summe $R \oplus S$ von R und S ist die Menge $R \times S$ mit den beiden Rechenoperationen

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2) \quad \text{und} \quad (r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = (r_1 \cdot r_2, s_1 \cdot s_2)\,.$$

Zeigen Sie, daß auch $R \oplus S$ ein Ring ist!

b) Nun seien R und S kommutative Ringe. Ist dann auch $R \oplus S$ ein kommutativer Ring?

c) Nun seien R und S Integritätsbereiche. Ist dann auch $R \oplus S$ ein Integritätsbereich?

d) Zeigen Sie: $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 1) \cong \mathbb{R}[X]/(X + 1) \oplus \mathbb{R}[X]/(X - 1)$!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Ist $\mathbb{R}[X, Y]$, der Ring aller reeller Polynome in zwei Variablen X, Y, ein Hauptidealring?

b) R sei ein Hauptidealring. Kann es eine unendliche Kette von Idealen $I_1, I_2, \ldots$ geben derart, daß jedes Ideal I_{k+1} echt in I_k enthalten ist für alle $k \in \mathbb{N}$?

Abgabe bis zum Dienstag, dem 27. Oktober 2015, um 15.30 Uhr