WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

13. Oktober 2015

5. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Zeigen Sie:

a) Eine Gruppe G ist genau dann abelsch, wenn für jedes Element $g \in G$ die Konjugationsabbildung $x \mapsto x^g$ gleich der identischen Abbildung ist.

b) G ist genau dann abelsch, wenn für je zwei Elemente a, b von G deren Kommutator $[a, b] \underset{\text{def}}{=} aba^{-1}b^{-1}$ gleich dem Neutralelement 1 ist.

c) Eine Gruppe, in der $g^2 = 1$ für alle $g \in G$, ist abelsch.

d) Jede endliche Gruppe mit gerader Ordnung enthält mindestens ein Element $g \neq 1$ mit $g^2 = 1$. *Hinweis: Zeigen Sie, daß* $\{g \in G \mid g \neq g^{-1}\}$ *eine gerade Elementanzahl hat.*

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

U sei die kleinste Untergruppe der Diedergruppe D_4, die die beiden Spiegelungen an den Diagonalen des Quadrats enthält.

a) Welche Elemente enthält U?

b) Ist U abelsch?

c) Ist U ein Normalteiler?

d) Zeigen Sie, daß U isomorph ist zu einer der aus der Vorlesung bekannten Gruppen!

e) Finden Sie die kleinste natürliche Zahl n, für die U in die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ eingebettet werden kann, und geben Sie eine Einbettung $U \to \mathfrak{S}_n$ explizit an!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) N, M seien zwei Normalteiler der Gruppe G. Zeigen Sie, daß dann auch $N \cap M$ ein Normalteiler ist und daß $G/(N \cap M)$ isomorph ist zu einer Untergruppe von $(G/N) \times (G/M)$!

b) N sei ein Normalteiler der Gruppe G und M ein Normalteiler der Gruppe H. Zeigen Sie, daß das direkte Produkt $N \times M$ ein Normalteiler von $G \times H$ ist und daß $(G \times H)/(M \times N)$ isomorph ist zu $(G/N) \times (H/M)$!

Aufgabe 4: *(2 Punkte)*

Eine Gruppe G heißt *einfach*, wenn sie außer sich selbst und der Untergruppe, die nur aus dem Neutralelement besteht, keine Normalteiler hat. Zeigen Sie: $\mathbb{Z}/n$ ist genau dann einfach, wenn n eine Primzahl ist.

Abgabe bis zum Dienstag, dem 20. Oktober 2015, um 15.30 Uhr