Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, C201

29. September 2015

3. Übungsblatt Algebra

Aufgabe 1: *(3 Punkte)*
Auf wie viele Nullen endet die Zahl 1000! ?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Finden Sie mit dem Sieb des Eratosthenes ohne Computerhilfe alle Primzahlen p mit $1320 \leq p \leq 1340$!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Ein Mathematiker möchte zur Feier seines Geburtstags die Kerzen (eine für jedes Lebensjahr) so auf ausgewählten Geburtstagstorten verteilen, daß die Anzahl auf jeder dieser Torten das Quadrat einer (festen) Primzahl p ist. Bei seinen Versuchen mit $p = 2, 3$ und 5 bleiben dabei aber jeweils p Kerzen übrig. Wie alt wird er?

b) Wie alt müßte er werden, bis ihm dies zum nächsten Mal passiert?

c) Einige Zeit später versucht er dasselbe bei der Feier zum Geburtstag eines klassischen griechischen Mathematikers. Aus Mangel an Torten kann er hier allerdings nicht mit so kleinen Primzahlen arbeiten, und versucht es deshalb mit $p = 7$ und $p = 11$. Wieder bleiben jeweils p Kerzen übrig. Wann wurde der griechische Mathematiker geboren?

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*
Zeigen Sie ohne Verwendung des kleinen Satzes von Fermat, daß für jede Primzahl p gilt

$$(a_1 + \cdots + a_r)^p \equiv a_1^p + \cdots + a_r^p \quad \text{für alle } a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}\,!$$

Aufgabe 5: *(5 Punkte)*
$p = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ ist keine Primzahl. Zeigen Sie, daß trotzdem $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$ gilt für alle zu p teilerfremden ganzen Zahlen a !
Hinweis: Betrachten Sie a^{p-1} modulo 3, 11 und 17 !

Abgabe bis zum Dienstag, dem 6. Oktober 2015, um 15.30 Uhr