WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6, B4.18

10. Oktober 2018

5. Übungsblatt Algebraische Statistik

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Ein Polynom $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ heißt *irreduzibel,* wenn es nicht konstant ist und wenn gilt: Falls f das Produkt gh zweier Polynome teilt, teilt f mindestens einen der beiden Faktoren. Zeigen Sie, daß das von einem irreduziblen Polynom erzeugte Hauptideal (f) gleich seinem Radikal ist!

b) Zeigen Sie, daß für jedes Ideal I gilt: $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$!

c) Zeigen Sie, daß das Polynom $f = (X-1)^2 + (Y-2)^2 + (Z-3)^2 \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ irreduzibel ist!

d) I sei das von f erzeugte Hauptideal. Zeigen Sie, daß das Polynom $(X-1)(Y-2)(Z-1)$ zwar auf $V(I)$ verschwindet, nicht aber in $\sqrt{I}$ liegt!

e) Zeigen Sie: Für jedes Ideal I von $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ gibt es ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, so daß $V(I) = V(f)$ ist!

Aufgabe 2: *(3 Punkte)*

a) I sei das vom Polynom $(X-1)^3(X-2)^7(X-3)^{17}$ erzeugte Ideal von $\mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie ein Polynom f, so daß $\sqrt{I} = (f)$ ist!

b) k sei ein beliebiger Körper, d, e seien natürliche Zahlen, und I sei das von X^d und Y^e erzeugte Ideal in $k[X, Y]$. Was ist $\sqrt{I}$?

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}[X, Y]/(Y^2 - X) \cong \mathbb{Q}[X] \oplus \mathbb{Q}[X]\,Y$!

b) Wie wird in $\mathbb{Q}[X] \oplus \mathbb{Q}[X]\,Y$ das Produkt zweier Elemente $f + gY$ und $p + qY$ mit f, g, p, q aus $\mathbb{Q}[X]$ berechnet?

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

I und J seien zwei Ideale im Polynomring $k[X_1, \dots, X_n]$ über dem Körper k und es gebe Elemente $f \in I$ sowie $g \in J$ derart, daß $f + g = 1$ ist.

a) Zeigen Sie, daß es dann kein echtes Ideal von $k[X_1, \dots, X_n]$ gibt, das sowohl I als auch J enthält.

b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $k[X_1, \dots, X_n] \to k[X_1, \dots, X_n]/I \oplus k[X_1, \dots, X_n]/J$, die jedem Polynom $p \in k[X_1, \dots, X_n]$ das Paar aus seiner Restklasse modulo I und seiner Restklasse modulo J zuordnet, surjektiv ist und den Durchschnitt $I \cap J$ als Kern hat!

c) Ein Ideal I im Polynomring $k[X_1, \dots, X_n]$ heißt bekanntlich *maximal*, wenn es kein Ideal $J \neq k[X_1, \dots, X_n]$ gibt, das I echt enthält. Zeigen Sie, daß für paarweise verschiedene maximale Ideale $I_1, \dots, I_r$ gilt

$$k[X_1, \dots, X_n]/(I_1 \cap \cdots \cap I_r) \cong k[X_1, \dots, X_n]/I_1 \oplus \cdots \oplus k[X_1, \dots, X_n]/I_r$$

Aufgabe 5: *(2 Punkte)*

I sei ein Ideal von $k[X_1, \dots, X_n]$, dessen GRÖBNER-Basis G bezüglich der lexikographischen Ordnung für jedes i ein Polynom enthalte, dessen führendes Monom eine Potenz von X_i ist. Zeigen Sie, daß $V(I)$ endlich ist!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 17. Oktober 2018, um 11.55 Uhr